

基于压缩感知的稀疏扫描型 CT 图像快速重建算法<sup>\*</sup>

董建 张海宁

(天津职业技术师范大学 自动化与电气工程学院 天津市信息传感与智能控制重点实验室 天津 300222)

**摘要:**鉴于 X 射线辐射对于患者存在的潜在风险,降低患者所受辐射剂量的问题已经引起了科研工作者的广泛关注。针对稀疏角度扫描型 CT 图像的重建方案提出了一种新的基于非线性压缩感知的图像重建算法。该算法将目标函数的正则化项引入了非线性滤波操作,并且使用联合双边滤波器,将其加入重建过程以获得图像质量的进一步提升。同时利用凸优化领域的临近点算法对目标函数进行最小化处理,构建出行加速型迭代算法。实验选用均方根误差(root mean square error, RMSE)和峰值信噪比(peak signal-to-noise ratio, PSNR)作为评价指标,将新算法同之前提出的 3 种算法进行对比,其峰值信噪比提升了 5.75~6.33 dB,均方根误差降低了 0.002~0.023。数字图像模型以及实际临床腹部影像的重建结果表明,新算法有效地去除了图像中的伪影噪声,同时最大限度保留了图像细节。

**关键词:**CT 图像重建;压缩感知;联合双边滤波;凸优化

**中图分类号:** TN911.73      **文献标识码:** A      **国家标准学科分类代码:** 510.4050

Fast reconstruction algorithm of sparse scanning CT images  
based on compressed sensing

Dong Jian Zhang Haining

(Tianjin Key Laboratory of Information Sensing and Intelligent Control, School of Automation and  
Electrical Engineering, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin 300222, China)

**Abstract:** In view of the potential risks of X-ray radiation to patients, the issue of reducing the radiation dose exposed by patients has attracted widespread attention among scientific researchers. This paper proposes a new image reconstruction algorithm based on nonlinear compressed sensing for the reconstruction scheme of sparse angle scan CT images. In this algorithm, the nonlinear filter is added to the regularization term of the cost function, and the joint bilateral filter is added to the reconstruction process to further improve the image quality. At the same time, the proximal point algorithm in the field of convex optimization is used to minimize the cost function and construct a row acceleration iterative algorithm. In the experiment, root mean square error (RMSE) and peak signal-to-noise ratio (PSNR) were selected as evaluation indexes, and the new algorithm was compared with the three algorithms proposed before. The peak signal to noise ratio is increased by 5.75~6.33 dB, and the root-mean-square error is reduced by 0.002~0.023. The results of digital image model and actual clinical abdominal image reconstruction show that the new algorithm can effectively remove the artifact noise in the image while preserving the image details to the maximum extent.

**Keywords:** CT image reconstruction; compressed sensing; joint bilateral filtering; convex optimization

## 0 引言

从 20 世纪 80 年代中期到 90 年代中期,计算机 X 射线断层扫描(computed tomography, CT)的使用率逐步增加,增加率超过了 500%。尽管 CT 给医疗诊断带来了便

捷,但是使患者被暴露在比大多数其他诊断形式更强的电离辐射中,而过量的辐射会增加遗传疾病和癌症的发病率<sup>[1]</sup>。低剂量 CT(low-dose CT, LDCT)的概念是在 1990 年首次被提出,多年来,众多 CT 研究人员、制造商和临床操作人员为降低 CT 辐射剂量做出了不懈的努力,也相继

收稿日期:2024-09-03

<sup>\*</sup> 基金项目:天津市教委科研项目(自然科学)(2021KJ012)资助

研究出了多种有效的方法<sup>[2]</sup>。其中,利用稀疏角度或受限角度投影数据、低管电压下的投影数据和非全局投影数据进行图像重建是在算法层面降低辐射的3个有效措施。但是,这3种措施都会对CT图像质量造成影响,使得重建后的CT图像出现噪声以及伪影。近年来在该领域的文献数量增长迅速,也预示着低剂量CT的成像算法开发已成为研究热点之一<sup>[3]</sup>。

本文重点研究利用稀疏角度投影下取得的投影数据并对其进行图像重建的问题。目前,针对低剂量和稀疏扫描型CT图像的重建算法的研究主要分为两个方向,分别是基于基础理论的传统算法研究和深度学习算法研究。两个研究方向均可以在处理CT图像的投影数据、干预图像重建过程和图像后处理3个方向进行应用<sup>[4]</sup>。在深度学习算法的研究中,由于人工智能算法的特殊性,使得其在图像后处理方面有着较好的效果。其中,卷积神经网络(convolutional neural network, CNN)以及生成对抗网络(generative adversarial network, GAN)<sup>[5]</sup>在去除CT图像噪声方面都取得了不错的效果。但是深度学习“黑匣子”端到端的学习方式缺乏可解释性,并且算法需要在大量的数据上进行训练测试,消耗了大量资源。而在传统算法的研究中,通过干预图像重建过程的算法在去除噪声方面有着较好的效果。这一类传统算法中重建算法可分为解析重建算法和迭代重建算法。解析重建算法主要包括针对二维平面的滤波反投影(filtered back projection, FBP)重建算法<sup>[6]</sup>,而迭代重建算法通过构建目标函数并对目标函数使用梯度下降等迭代算法求解得到重建图像,其效果通常优于解析重建算法。20世纪70年代,代数重建技术(algebraic reconstruction technique, ART)首次被提出。作为迭代重建中一种最简单的形式,ART算法已经开始在一部分CT扫描设备中用于图像重建。ART算法在每次迭代时对单条X射线和待重建图像中的单一像素进行更新,之后出现的迭代重建技术(same iterative reconstruction techniques, SIRT)可同时完整的投影域图像数据进行同步更新,这进一步提高了算法的稳定性。

2006年Donoho提出了基于压缩感知(compressed sensing, CS)的方法对稀疏投影数据和含噪声的低剂量投影数据进行图像重建。在此之后,压缩感知理论的兴起为CT图像重建提供了新的理论依据和思路<sup>[7]</sup>。2018年,陈佩君<sup>[8]</sup>提出一种基于图像全变分和传统张量字典学习的图像重建算法,该算法在进一步修复图像细节的同时抑制了伪影和噪声的出现。2020年,刘进等<sup>[9]</sup>提出了一种基于卷积稀疏编码CT图像重建算法,其算法可获得噪声伪影少、结构细节对比度高的重建图像,同时验证了算法的稳定性。2022年,颜溶标等<sup>[10]</sup>提出了一种改进加权卷积稀疏编码的图像去噪算法,将卷积稀疏编码和特征提取相结合,有效地去除了图像中的伪影噪声。但是,上述这些算法都存在噪声过度矫正,部分图像细节以及特征丢失等问题。而目前,CS理论的求解机制一般要求先设计一个

包含数据保真项和惩罚项的目标函数,这个惩罚项称为正则化项。然后根据凸优化理论最小化目标函数,求得函数的最优解。因此,正则化项的设计对图像的重建质量起着十分重要的作用。全变分(total variation, TV)正则化在去除图像噪声、保存物体边缘方面效果较好,但是,在实际的CT图像重建过程中,由全变分正则化重建出的CT图像往往会出现失真现象,图像的部分细节会丢失。基于此类情况,本文创新了目标函数的设计方式,提出将非线性滤波器嵌入正则化项,进一步增强算法对图像的重建能力。然而,常见的非线性滤波器对于稀疏角度的投影数据得出的CT图像重建效果有限,这是因为当投影角度非常稀少时,图像所包含的信息也会减少,非线性滤波器能够获得的图像信息也会减少,因此,非线性滤波器会在去除图像伪影噪声的同时平滑掉图像的部分细节信息。所以,需要针对常见的非线性滤波器进行相应的改进,使其能在去除图像伪影的同时最大限度保留图像的细节。本文研究验证了TV模型以及中值滤波、双边滤波和联合双边滤波器,分别嵌入CS框架后的重建效果,确认了新算法的有效性。利用凸优化领域的临近点算法对目标函数进行了最小化处理,构建出行加速型的快速迭代重建算法,并利用数字图像模型LUNG,以及腹部CT图像的实验结果验证了所提出的新算法的准确性、稳定性以及收敛性。

## 1 算法介绍

### 1.1 问题定义

CT图像重建的目的是从测量的投影数据中恢复一个物体。当迭代方法被用于图像重建时,问题可以被表述为求解线性方程组 $\mathbf{A}\vec{x}=\vec{b}$ 。其中 $\vec{b}=(b_1, b_2, \dots, b_I)^T$ 表示探测器所获得的投影数据, $\vec{x}=(x_1, x_2, \dots, x_J)^T$ 表示待求解的图像,而 $\mathbf{A}=\{a_{ij}\}$ 则表示一个 $I \times J$ 维的系统矩阵,系统矩阵 $\mathbf{A}$ 由CT装置决定<sup>[11]</sup>。而当投影数据 $\vec{b}$ 的维度小于 $\vec{x}$ 的维度时,问题就会变得不确定,从数学的角度上考虑,此时 $\vec{x}$ 会有无穷多组解。因此,重建出一个准确的图像具有挑战性。在此情况下,通常利用CS理论来获取一个可行的图像。依据CS理论,本文设置了目标函数如下:

$$f_{\beta}(\vec{x}) = L(\vec{x}) + \beta U(\vec{x}) \quad (1)$$

式中: $\beta$ 为控制正则化项强度的超参数; $L(\vec{x})$ 为数据保真项,由最小二乘误差 $\|\mathbf{A}\vec{x}-\vec{b}\|^2$ 表示,保证待求解向真实值不断逼近。而 $U(\vec{x})$ 则为正则化项,定义为:

$$U(\vec{x}) = \|(I-L)\vec{x}\|_1 = \|\vec{x}-L\vec{x}\|_1 \quad (2)$$

式中: $I$ 是一个单位算子; $L$ 则是一个相对应的线性低通滤波器,因为非线性滤波器对于图像去噪效果较好,所以本文用非线性滤波器 $M$ 代替线性滤波器 $L$ ,以达到提高图像质量的目的。因此,式(1)的目标函数可被更加详细地表达为:

$$f_{\beta}(\vec{x}) = \|\mathbf{A}\vec{x}-\vec{b}\|^2 + \beta \|\vec{x}-M\vec{x}\|_1 =$$

$$\|\mathbf{A}\vec{x} - \vec{b}\|^2 + \beta \sum_{j=1}^J |x_j - (M\vec{x})_j| \quad (3)$$

式(3)的  $M$  操作代表对图像的非线性低通滤波,该正则化项使非线性滤波操作被引入 CS 框架,使非线性滤波的优势得以在 CS 中发挥重要作用,这也是本文设计该正则化项的出发点。而  $\beta$  控制着正则化项的强弱,需要根据具体的图像来确定其大小。

## 1.2 正则化项中的非线性滤波

本文重点验证了中值滤波、双边滤波以及联合双边滤波分别嵌入正则化项后图像重建的效果。

中值滤波是一种基本的非线性滤波器。中值滤波是通过排序选择的基本思想来消除孤立的噪声点,首先选择图像中一个邻域内的像素值并进行排序,然后用该邻域像素值排序得到的中值来代替待处理的像素,让邻域内的像素值更趋近于真实值。中值滤波<sup>[12]</sup>能有效去除脉冲性噪声,且在图像处理任务中能有效地保存图像中物体的边缘。

双边滤波是一种进化了的均值滤波,其首先计算出中心像素及其邻域像素的权重,一般情况下所采用的是基于高斯分布的加权平均。再用求出的加权平均值代替中心像素的原有像素值,以同样的模式对每一个像素点进行遍历。双边滤波在计算权重的过程中除了考虑像素间几何距离上的接近程度外,还考虑像素间灰度的一致性。这使得双边滤波不仅能有效去除噪声,还能保存图像上的细节信息<sup>[13]</sup>。式(4)为双边滤波的计算公式,式(5)为双边滤波的归一化项计算公式。

$$S_p = \frac{1}{w_p^{bf}} \sum_{q \in \Omega} I_q G_s(\|p - q\|) G_r(\|I_p - I_q\|) \quad (4)$$

$$W_p^{bf} = \sum_{q \in \Omega} G_s(\|p - q\|) G_r(\|I_p - I_q\|) \quad (5)$$

式中:  $p$  表示像素索引;  $I$  表示输入图像;  $S$  表示经过双边滤波处理后的图像;  $\Omega$  为窗口大小;  $q$  表示  $\Omega$  中的像素;  $G_s$  表示空间域的核函数;  $G_r$  则表示像素范围域的核函数;  $W_p^{bf}$  表示归一化的项。

联合双边滤波是建立在双边滤波基础上的滤波模型,它允许高斯核函数在原图像之外的引导图像中获取样本,从而拓宽了滤波先验信息的来源<sup>[14-15]</sup>。联合双边滤波与双边滤波非常相似,联合双边滤波的计算公式为:

$$S_p = \frac{1}{w_p^{jbf}} \sum_{q \in \Omega} I_q G_s(\|p - q\|) G_r(\|\tilde{I}_p - \tilde{I}_q\|) \quad (6)$$

$$W_p^{jbf} = \sum_{q \in \Omega} G_s(\|p - q\|) G_r(\|\tilde{I}_p - \tilde{I}_q\|) \quad (7)$$

式中:  $\tilde{I}$  表示一幅新的图像,称之为引导图像。当式(6)和(7)中的  $\tilde{I} = I$  时,联合双边滤波就变成了双边滤波。所以,在联合双边滤波器中,引导图像的选择影响着滤波效果的好坏。本文选择使用原始图像作为引导图像,原始图像包含了丰富的灰度信息,能够有效地指导滤波过程。联合双边滤波器通过考虑像素之间的空间距离和灰

度值的相似性来进行滤波。在此过程中,引导图像的灰度值被用来计算像素之间的相似性,从而保持图像的细节和纹理。同时,空间距离则用来控制滤波器的范围,以确保只有相邻像素之间的相似性被考虑进来。因此,利用引导图像能够有效地保持图像的结构和细节,使得联合双边滤波器在去除噪声和伪影的同时不会破坏图像的细节特征。

## 1.3 算法推导

由于式(3)涉及 L1 范数,而 L1 范数具有不可微性,无法直接应用经典的可微优化方法(如梯度下降法)。因此,本文选择采用迭代阈值法(iterative threshold, IT),这是一种专门用于解决 L1 范数最小化问题的有效方法。在此过程中,首先需要构造一个满足式(8)的代理函数  $Q(\vec{x}^{(k)}; \vec{x}(k))$ 。

$$Q(\vec{x}^{(k)}; \vec{x}(k)) = f_\beta(\vec{x}^{(k)}), \quad Q(\vec{x}; \vec{x}(k)) \geq f_\beta(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \quad (8)$$

式中:  $k$  是迭代次数。

然后经过一系列的等式和不等式变换,可以把式(8)转化为:

$$Q(\vec{x}; \vec{x}(k)) = C + \beta \sum_{j=1}^J |x_j - (M\vec{x})_j| + \frac{1}{2} \alpha \|\vec{x} - \vec{d}(\vec{x}(k))\|^2, \quad \vec{d}(\vec{x}(k)) = \vec{x}(k) - \frac{2}{\alpha} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \vec{x}(k) - \vec{b}) \quad (9)$$

此时,式(9)中仍包含一个未知量  $M\vec{x}$ , 该未知量依赖于  $\vec{x}$ 。然而,通过对式(9)的分析发现,当  $\alpha$  取值较大时,在最小化  $Q(\vec{x}(k); \vec{x}(k))$  的过程中,未知的  $\vec{x}$  可近似于  $\vec{d}(\vec{x})$ 。因此,可采用  $M\vec{x} = M\vec{d}(\vec{x}(k))$  进行常数逼近,从而实现变量分离。最后,通过在每个迭代次数  $k$  中最小化代理函数  $Q(\vec{x}(k); \vec{x}(k))$ , 可以得到式(10),求得  $\vec{x}$  的解。

$$x_j^{(k+1)} = \begin{cases} d_j(\vec{x}^{(k)}) - \frac{\beta}{\alpha}, & d_j(\vec{x}^{(k)}) - M_j(\vec{d}(\vec{x}(k))) > \frac{\beta}{\alpha} \\ d_j(\vec{x}^{(k)}) + \frac{\beta}{\alpha}, & d_j(\vec{x}^{(k)}) - M_j(\vec{d}(\vec{x}(k))) < -\frac{\beta}{\alpha} \\ M_j(\vec{d}(\vec{x}(k))), & \text{其他} \end{cases} \quad (10)$$

然而,通过式(8)~(10)推导出的算法有一个缺点,即算法在进行每一次迭代计算时,所有的投影数据样本  $b_1, b_2, \dots, b_l$  都在被使用,这使得算法的计算量大幅提升。通过参考 ART 这类具有快速收敛性能的 CT 图像迭代重建算法,尝试引入一类具有行一动作或者说块迭代结构的迭代算法来增加算法的收敛速度。本文提出了一种可用于正则化项是不可微的 L1 范数情况下的行加速型迭代算法。

首先需要式(3)进行分解,以将其转化为:

$$f_{\beta}(\vec{x}) = \|\mathbf{A}\vec{x} - \vec{b}\|^2 + \beta \sum_{j=1}^J |x_j - (M\vec{x})_j| = \sum_{i=1}^I f_i(\vec{x}) + g(\vec{x}) \quad (11)$$

$$f_i(\vec{x}) = (\vec{a}_i^T \vec{x} - b_i)^2, g(\vec{x}) = \beta \sum_{j=1}^J |x_j - (M\vec{x})_j| \quad (12)$$

式中:  $I$  是投影数据的维度;  $\vec{a}_i^T$  表示系统矩阵  $\mathbf{A}$  第  $i$  行对应的向量的转置;  $g(\vec{x})$  来表示正则化项。同时, 目标函数最小化过程需要用到凸优化理论中的重要工具, 临近点算法。文献[16]对该算法进行了详细介绍, 因此本文不再赘述。根据上述拆分, 算法的每一次迭代都是依次应用  $f_1(\vec{x}), \dots, f_I(\vec{x})$  相关的临近点算法中的  $prox$  算子, 然后再计算与  $g(\vec{x})$  相关的  $prox$  算子, 即处理正则化项。在此情况下, 引入了一个跨度参数  $S$ , 目的是利用跨度参数  $S$  来控制正则化项在每个主迭代  $k$  期间对图像进行平滑的强弱程度。上述过程被总结成式(13)。

$$\begin{cases} loop\ i = 1, 2, \dots, I \\ \vec{x}^{(k, i+1)} = prox_{\gamma^{(k)} f_i}(\vec{x}^{(k, i)}) \\ \text{if } ((i \bmod S) == 0) \\ \vec{x}^{(k, i+1)} \leftarrow prox_{\frac{S\gamma^{(k)}}{I} g}(\vec{x}^{(k, i+1)}) \\ \vec{x}^{(k+1, 1)} = \vec{x}^{(k, I+1)} \end{cases} \quad (13)$$

由式(13)可知, 在变量的  $i$  循环过程中, 任何一个投影数据元素  $b_i$  均能促成一次图像的更新。只要程序的执行遵循特定的数据访问顺序, 该算法就能像 ART 算法一样具有快速收敛性质。接下来, 将对式(13)中涉及的每个近端算子的明确表达进行推导。首先, 关于  $f_i(\vec{x})$  的近端算子被定义为:

$$\vec{x}^{(k, i+1)} = prox_{\gamma^{(k)} f_i}(\vec{x}^{(k, i)}) = \underset{\vec{x}}{\operatorname{argmin}} \left( (\vec{a}_i^T \vec{x} - b_i)^2 + \frac{1}{2\gamma^{(k)}} \|\vec{x} - \vec{x}^{(k, i)}\|^2 \right) \quad (14)$$

引入一个松弛变量, 将式(14)转化为:

$$\begin{aligned} \vec{x}^{(k, i+1)} &= prox_{\gamma^{(k)} f_i}(\vec{x}^{(k, i)}) = \\ \underset{\vec{x}}{\operatorname{argmin}} &\left( (z - b_i)^2 + \frac{1}{2\gamma^{(k)}} \|\vec{x} - \vec{x}^{(k, i)}\|^2 \right) \\ \text{subject to } z &= \vec{a}_i^T \vec{x} \end{aligned} \quad (15)$$

式(15)可以通过构建拉格朗日函数来解决:

$$\begin{aligned} L(\vec{x}, z, \lambda) &= \frac{1}{2\gamma^{(k)}} \|\vec{x} - \vec{x}^{(k, i)}\|^2 + (z - b_i)^2 + \\ \lambda(z - \vec{a}_i^T \vec{x}) \end{aligned} \quad (16)$$

最后, 通过对拉格朗日函数进行优化, 可得到图像的更新方程:

$$\vec{x}^{(k, i+1)} = \vec{x}^{(k, i)} + \gamma^{(k)} \frac{b_i - \vec{a}_i^T \vec{x}^{(k, i)}}{\frac{1}{2} + \gamma^{(k)} \|\vec{a}_i\|^2} \vec{a}_i \quad (17)$$

接下来计算  $g(\vec{x})$  对应的  $prox$  算子:

$$\begin{aligned} \vec{x}^{(k, i+1)} &\leftarrow prox_{\frac{S\gamma^{(k)}}{I} g}(\vec{x}^{(k, i+1)}) = \\ \underset{\vec{x}}{\operatorname{argmin}} &\left( \frac{S}{I} \beta \sum_{j=1}^J |x_j - (M\vec{x})_j| + \frac{1}{2\gamma^{(k)}} \|\vec{x} - \vec{x}^{(k, i+1)}\|^2 \right) \end{aligned} \quad (18)$$

由于式(18)中的最小化问题受限于  $M\vec{x}$  的存在, 依然难以直接求解。借鉴式(9)的求解方法, 可通过常数逼近实现变量分离, 从而得到软阈值方程如下:

$$x_j^{(k+1)} = \begin{cases} x_j^{(k, i+1)} - \frac{S\gamma^{(k)}\beta}{I}, & x_j^{(k, i+1)} - M_j(\vec{x}^{(k, i+1)}) > \frac{S\gamma^{(k)}\beta}{I} \\ x_j^{(k, i+1)} + \frac{S\gamma^{(k)}\beta}{I}, & x_j^{(k, i+1)} - M_j(\vec{x}^{(k, i+1)}) < -\frac{S\gamma^{(k)}\beta}{I} \\ M_j(\vec{x}^{(k, i+1)}), & \text{其他} \end{cases} \quad (19)$$

至此, 算法总结完毕。

#### 1.4 算法展示

初始化: 输入像素数为  $N \times M$  的投影数据  $b$ , 设置  $\beta > 0, \gamma > 0$  的超参数以及  $S > 0$  的跨度参数。

步骤 1) 计算步长参数:

$$\gamma^{(k)} = \frac{\gamma^{(0)}}{1 + \epsilon k}, \vec{x}^{(k, i)} = \vec{x}^{(k)}.$$

步骤 2) 图像更新程序:

for ( $i = 0; i < N \times M; i++$ ) do

$$\vec{x}^{(k, i+1)} = \vec{x}^{(k, i)} + \gamma^{(k)} \frac{b_i - \vec{a}_i^T \vec{x}^{(k, i)}}{1/2 + \gamma^{(k)} \|\vec{a}_i\|^2} \vec{a}_i$$

If  $((i \bmod S) == 0)$  for all the pixels  $J$  in the image do

$$x_j^{(k+1)} = \begin{cases} x_j^{(k, i+1)} - \frac{S\gamma^{(k)}\beta}{I}, & x_j^{(k, i+1)} - M_j(\vec{x}^{(k, i+1)}) > \frac{S\gamma^{(k)}\beta}{I} \\ x_j^{(k, i+1)} + \frac{S\gamma^{(k)}\beta}{I}, & x_j^{(k, i+1)} - M_j(\vec{x}^{(k, i+1)}) < -\frac{S\gamma^{(k)}\beta}{I} \\ M_j(\vec{x}^{(k, i+1)}), & \text{其他} \end{cases}$$

步骤 3) 令  $\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k, N \times M)}$ , 返回步骤 2)。

输出: 当循环条件被满足时, 输出图像  $\vec{x}^{(k+1)}$ 。

## 2 实验结果分析

### 2.1 实验准备

本文选用 C 编程语言在 Visual Studio 2015 运行平台上进行了实现。所使用的 PC 机参数为 Intel(R) Xeon(R) 2.40 GHz 的 CPU 处理器, 32.0 GB 内存, 64 位 Windows 7 专业版操作系统。实验选用数字图像模型以及实际临床腹部影像的重建结果来验证新算法的有效



性。其中,数字图像模型 LUNG 图像大小为  $256 \times 256$  pixels,投影数据采用平行光束几何学计算,具有 256 个径方向元,在  $180^\circ$  范围内取了 16 个角度方向。而腹部 CT 图像大小为  $512 \times 512$  pixels,投影数据具有 512 个径方向元。在  $180^\circ$  范围内取 3 种不同的角度方向进行实验,分别为  $60^\circ$ 、 $72^\circ$  以及  $84^\circ$ 。在实验中,所有实验均采用迭代 20 次的结果。

2.2 实验过程

为了得到最优的实验结果,将实验中的相关参数进行了统一设置,分别是超参数  $\beta$ 、跨度参数  $S$ 、参数  $\epsilon$ 、步长参数的初值  $\gamma^{(0)}$  以及滤波器参数  $\delta 1$ 、 $\delta 2$ 。具体的参数数值设置如表 1 所示。完成参数设置后,利用稀疏采样得到的投影数据作为输入,利用算法的图像更新程序对其进行迭代处理,直到满足输出条件后输出实验结果。

表 1 实验参数设置  
Table 1 Experimental parameter settings

|          | $\beta$ | $S$            | $\epsilon$ | $\gamma^{(0)}$ | $\delta 1$ | $\delta 2$ |
|----------|---------|----------------|------------|----------------|------------|------------|
| 数字图像模型   | 10      | $4 \times 256$ | 1 000      | 10             | 50         | 0.001      |
| 腹部 CT 图像 | 1 500   | $9 \times 512$ | 1 000      | 10             | 3 000      | 3          |

2.3 实验结果对比

为了检验所提新算法的性能,在实验中,对比了 4 种基于压缩感知的快速迭代重建算法的结果,分别将 4 种不同的方法嵌入行加速型 CS 框架中的正则化项中。这 4 种方法分别是中值滤波、TV、双边滤波以及联合双边滤波。其中,中值滤波和双边滤波属于去噪性能较好的非线性滤波器,而 TV 算法则是在图像修复领域属于较为经典的方法。各对比方法的参数均依据建议的最佳值来设定。对于定量分析时的客观评价指标,本文采用了均方根误差 (root mean square error, RMSE) 和峰值信噪比 (peak signal-to-noise ratio, PSNR) 两种图像的客观评价指标<sup>[17]</sup>。其定义为:

$$RMSE(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^J (x_j - x'_j)^2}{J}} \tag{20}$$

$$PSNR(\mathbf{x}) = 20 \times \lg \frac{\max(\mathbf{x})}{RMSE(\mathbf{x})} \tag{21}$$

式中:  $x_j$  和  $x'_j$  分别代表重建图像和参考图像的第  $j$  个像素的像素值。RMSE 反映的是图像间的差异程度,是一种基于像素误差的图像质量客观评价指标,用于衡量被处理图像与参考图像之间的差异。RMSE 的值越小表示重建图像的质量越好。PSNR 则是一种基于误差敏感度的图像质量评价指标,其值越大表示重建图像的质量越好。

图 1 所示是行加速型的迭代重建算法和式 (10) 提出的改良前的迭代重建算法分别对数字图像模型进行重建的结果。可以观察到行加速型迭代重建算法在迭代到 20 次时已经基本收敛,而改进前的算法在迭代到 20 次时明显还未收敛。最终,两种算法的迭代 1 000 次的结果基本一致。由此可以得出,行加速型迭代重建算法具有快速收敛性,能在少数迭代次数中重建出图像质量较好的图像。

图 2、3 所示分别是数字图像模型 LUNG 和腹部 CT 图像的结果。图 2 中,由中值滤波的结果可以看到,图像中的伪影情况得到了改善,但是通过观察图像细节可以发

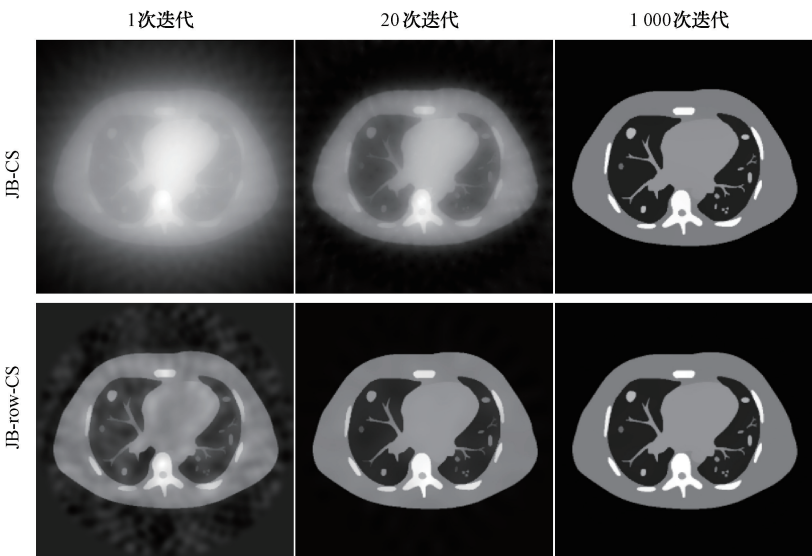


图 1 数字图像模型 LUNG 的不同算法重建速度对比

Fig. 1 Comparison of reconstruction speed of different algorithms for digital image model LUNG

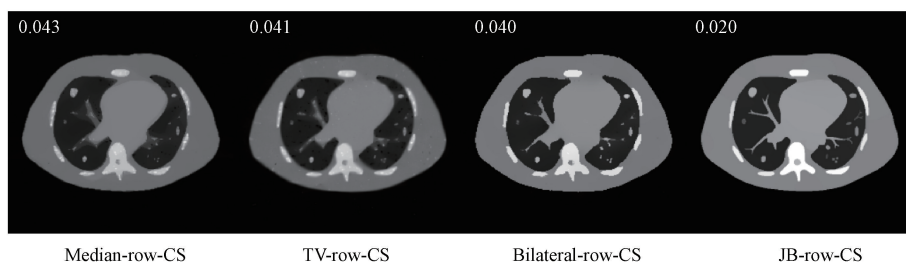


图2 数字图像模型 LUNG 的重建结果

Fig. 2 Reconstruction results of digital image model LUNG

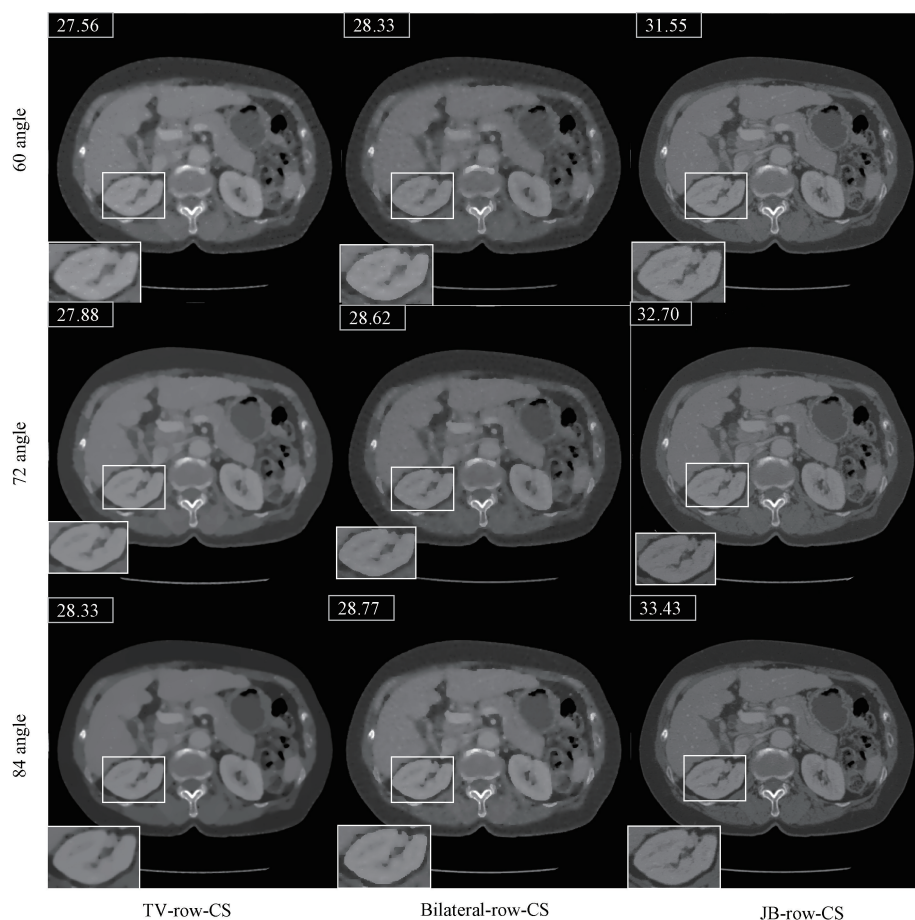


图3 不同角度下腹部临床 CT 图像的重建结果

Fig. 3 Reconstruction results of clinical CT images of the lower abdomen at different angles

现图像中依旧存在噪声和伪影残留。由 TV 模型的重建结果发现,图像中依旧存在噪声残留的问题,并且图像有明显的细节损失。由双边滤波的结果看出,图像中伪影已经消失,但是图像损失了部分细节信息,并且图像清晰度损失较高,使图像出现了锯齿边缘。由联合双边滤波的结果可以看到,图像的伪影已经去除,图像细节保存完好,图像的清晰度损失较低,图像质量得到了明显的改善。联合双边滤波成功克服了双边滤波的缺点,在引导图像的指导下成功区分出了图像细节和噪声,在去除伪影的同时保留

了图像细节。

图3中,选择将图像中的一个细节部分进行了放大,使实验结果更加直观。由 TV 模型的重建结果可以看出,图像中的伪影已经消失,但是图像失真严重,通过观察细节放大部分可以发现细节部分模糊度很高,已经无法辨认出原有器官。由双边滤波的结果可以发现,双边滤波相比 TV 保留了一些图像的细节,但是残留了许多伪影噪声。通过观察细节放大部分,也可以发现细节上有许多噪声残留。由联合双边滤波的结果看出,图像质量整体较好,细

节保存完好,图像清晰度损失较少的同时消除了伪影对于图像的影响。除了主观的定性分析,在图 2、3 的结果中分别标注了图像的 RMSE 值和 PSNR 值。通过观察客观指标可知,联合双边滤波器取得了最优的客观评价结果。相对于其他方法数值上有了明显的提升。

表 2 为 4 种算法的数字图像模型重建结果的最小 RMSE 值和最大 PSNR 值,以及算法的运行时间结果。

表 2 结果图像评价指标与算法运行时间

Table 2 Results image evaluation index and algorithm running time

| 算法               | RMSE  | PSNR  | 运行时间/s |
|------------------|-------|-------|--------|
| Median-row-CS    | 0.043 | 75.48 | 90.33  |
| TV-row-CS        | 0.041 | 75.79 | 77.28  |
| Bilateral-row-CS | 0.040 | 76.06 | 69.15  |
| JB-row-CS        | 0.020 | 81.81 | 60.31  |

从表 2 可以看出,联合双边滤波重建出来的图像结果具有最小的 RMSE 值以及最大的 PSNR 值,这符合之前的主观评价结果。此外,联合双边滤波所用的运行时间也是最短的,只用了 60 s 左右的时间完成了 20 次的迭代并且重建出了效果较好的图像。

另外,本文验证了基于非线性压缩感知的图像重建算法的收敛性,记录了各次迭代结果图像的 RMSE 值和 PSNR 值随迭代次数的变化情况。图 4 所示为 JB-row-CS 算法的运行过程中 PSNR 值的变化轨迹,图 5 所示为该算法的运行过程中 RMSE 值的变化轨迹。由图 4 和 5 可知,算法在迭代到第 5 次左右就已经基本上收敛到了特定的区间内,验证了算法的收敛性能。

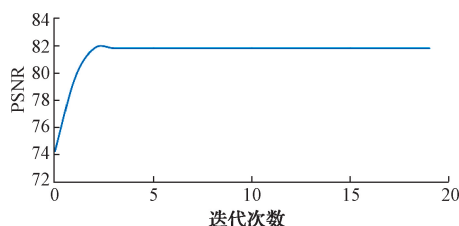


图 4 PSNR 值随迭代次数的变化

Fig. 4 PSNR value changes with the number of iterations

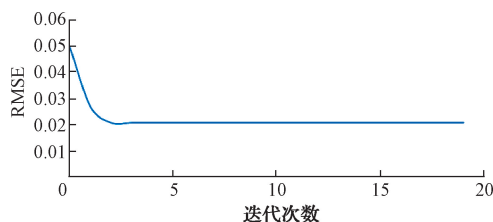


图 5 RMSE 值随迭代次数的变化

Fig. 5 RMSE value changes with the number of iterations

### 3 结论

本文研究了稀疏角度投影下基于非线性压缩感知的 CT 图像重建算法的开发问题。对稀疏角度投影下采集的投影数据进行重建,把去除噪声以及保留图像边缘和细节效果较好的非线性滤波器引入到了压缩感知理论框架中的正则化项当中,对压缩感知在图像重建领域的作用功效进行了改善。通过实验分别验证了 TV、中值滤波、双边滤波和联合双边滤波在压缩感知算法中的功效。实验结果表明,新算法在将联合双边滤波加入了重建过程之后,对于图像的伪影去除、细节保留和清晰度提升效果非常明显。主观观察和客观评价指标都表明基于联合双边滤波的压缩感知算法获得了最优的图像重建效果。然而,新算法若要得出最优的结果需要同时对多个参数进行调整,因此参数的训练将是本文面临的挑战。制定能够依据不同的图像重建任务的自适应参数决策系统将是下一步的研究方向。同时,联合双边滤波器为我们提供了一个非线性滤波框架,选择更为合适的引导图像也将是下一步研究的重点。此外,还可以寻找更为合适的非线性滤波器插入 CS 的框架当中,或者尝试将非线性滤波器与深度学习领域的知识相结合对重建图像进行后处理也是今后的一个重点研究方向。

### 参考文献

- [1] 陈文斌. 低剂量 CT 图像伪影消除及细节保护算法研究[D]. 太原: 中北大学, 2020.  
CHEN W B. Research on low-dose CT image artifact elimination and detail protection algorithms [D]. Taiyuan: North China University, 2020.
- [2] 崔学英. 低剂量 CT 的投影域去噪算法和后处理方法研究[D]. 太原: 中北大学, 2015.  
CUI X Y. Research on projection domain denoising algorithm and post-processing method for low-dose CT[D]. Taiyuan: North China University, 2015.
- [3] 董建, 陈昊, 孟庆宽, 等. 低剂量照射条件下 CT 影像快速重建算法研究[J]. 天津职业技术师范大学学报, 2021, 31(2): 1-7, 85.  
DONG J, CH H, MENG Q K, et al. Research on rapid reconstruction algorithm of CT images under low-dose irradiation conditions [J]. Journal of Tianjin University of Technology and Education, 2021, 31(2): 1-7, 85.
- [4] 陈昊. 稀疏扫描型 CT 与低剂量 CT 的图像重建算法研究[D]. 天津: 天津职业技术师范大学, 2023.  
CHEN H. Research on image reconstruction algorithms of sparse scan CT and low-dose CT[D]. Tianjin: Tianjin University of Technology and Education, 2023.

- [5] 高文波,孔慧华,连祥媛.基于多尺度生成对抗网络的低剂量CT去噪算法[J].国外电子测量技术,2021,40(8):1-6.  
GAO W B, KONG H H, LIAN X Y. Low-dose CT denoising algorithm based on multi-scale generative adversarial network [J]. Foreign Electronic Measurement Technology, 2021, 40(8): 1-6.
- [6] 刘震,刘钰,杨子淳.基于Radon变换和滤波反投影算法的CT系统重建算法研究[J].国外电子测量技术,2018,37(8):113-117.  
LIU ZH, LIU Y, YANG Z CH. Research on CT system reconstruction algorithm based on Radon transform and filtered back projection algorithm[J]. Foreign Electronic Measurement Technology, 2018, 37(8): 113-117.
- [7] 李雨,史娜,孔慧华,等.基于全变分和梯度域卷积稀疏编码的稀疏角度CT重建算法[J].激光与光电子学进展,2021,58(12):339-348.  
LI Y, SHI N, KONG H H, et al. Sparse angle CT reconstruction algorithm based on total variation and gradient domain convolution sparse coding [J]. Progress in Lasers and Optoelectronics, 2021, 58(12): 339-348.
- [8] 陈佩君.基于图像总变分联合张量字典学习的能谱CT图像重建及材料识别研究[D].重庆:重庆大学,2021.  
CHEN P J. Research on energy spectrum CT image reconstruction and material identification based on image total variation joint tensor dictionary learning [D]. Chongqing: Chongqing University, 2021.
- [9] 刘进,亢艳芹,胡殿麟,等.小波域卷积稀疏编码的低剂量CT图像重建[J].计算机辅助设计与图形学学报,2020,32(11):1784-1794.  
LIU J, KANG Y Q, HU D L, et al. Low-dose CT image reconstruction using wavelet domain convolution sparse coding [J]. Journal of Computer-Aided Design and Graphics, 2020, 32(11): 1784-1794.
- [10] 颜溶标,刘文婷,谷亚男,等.基于多尺度边缘提取和加权卷积稀疏编码的低剂量CT去噪算法[J].国外电子测量技术,2022,41(9):9-15.  
YAN R B, LIU W T, GU Y N, et al. Low-dose CT denoising algorithm based on multi-scale edge extraction and weighted convolution sparse coding [J]. Foreign Electronic Measurement Technology, 2022, 41(9):9-15.
- [11] KUDO D J. Proposal of compressed sensing using nonlinear sparsifying transform for CT image reconstruction [J]. Medical Imaging Technology, 2016, 34(5): 235-244.
- [12] 王帅,刘光宇,曹禹,等.改进自适应中值滤波算法的图像去噪研究[J].河南科技学院学报(自然科学版),2022,50(6):43-48.  
WANG SH, LIU G Y, CAO Y, et al. Research on image denoising with improved adaptive median filter algorithm [J]. Journal of Henan University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2022, 50(6):43-48.
- [13] 马光豪.基于稀疏高频梯度和联合双边滤波的图像平滑算法研究[D].济南:山东大学,2018.  
MA G H. Research on image smoothing algorithm based on sparse high-frequency gradient and joint bilateral filtering[D]. Ji'nan: Shandong University, 2018.
- [14] YONGMEI F W. Image fusion method based on JBF and multi-order local region energy[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2022, 40(6): 1414-1421.
- [15] YLNSMMFMFW A. Trainable joint bilateral filters for enhanced prediction stability in low-dose CT[J]. Scientific Reports, 2022, 12(1):17540-17540.
- [16] DONG J, KUDO H. Accelerated algorithm for compressed sensing using nonlinear sparsifying transform in CT image reconstruction [J]. Medical Imaging Technology, 2017, 35(1):63-73.
- [17] 董建,毕丹阳,杨耿煌,等.探测器故障下医用CT图像重建的容错算法开发[J].天津职业技术师范大学学报,2020,30(1):7-12,25.  
DONG J, BI D Y, YANG G H, et al. Development of fault-tolerant algorithm for medical CT image reconstruction under detector failure [J]. Journal of Tianjin Vocational and Technical Normal University, 2020, 30(1): 7-12, 25.

#### 作者简介

董建,博士,副教授,硕士生导师,主要研究方向为医学影像处理、CT影像重建算法开发。

E-mail:dongjian2007.happy@163.com

张海宁,硕士研究生,主要研究方向为医学影像处理。

E-mail:zdyzhn@163.com