

基于最小二乘法的球杆系统输入输出建模研究

李志民¹ 柳强¹ 张新权¹ 赵志广²

(1. 辽宁石油化工大学信息与控制工程学院 抚顺 113001; 2. 首钢股份公司迁安钢铁分公司 迁安 064400)

摘要: 球杆系统常用于检验控制策略和控制理论的效果, 如何整定优化球杆系统的控制参数具有重要意义。应用 MATLAB 软件进行仿真实验, 对系统输入的控制参数 P 、 D 与系统输出的稳定时间、超调量之间的映射关系进行采样, 并应用最小二乘法进行拟合, 进而建立基于数据驱动的球杆系统控制输入与输出的数学模型。经过验证表明建模精度较高, 为控制参数优化设计提供了模型支持。

关键词: 最小二乘法; 球杆系统; 数学模型

中图分类号: TP274 TN957.52 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 510.40

Research on control input-output modeling for ball-beam system based on least square method

Li Zhimin¹ Liu Qiang¹ Zhang Xinquan¹ Zhao Zhiguang²

(1. School of Information and Control Engineering, Liaoning Shihua University, Fushun 113001, China;

2. Shougang Qian'an Iron & Steel Company, Qianan 064400, China)

Abstract: Ball-beam system is often used to verify the performance of control strategies and theories, which make optimizing the ball-beam system control parameters be of great significance. In this article, simulation experiments via the MATLAB software are firstly conducted. Subsequently, the P 、 D parameters are selected as input parameters while the settling time and overshoot amount are selected as output ones of the control system. Then, some sampled data reflecting the mapping relationship between the input and output of the control system are obtained. Further, the data-based mathematical model which reflects the input-output of ball-beam control system is constructed by using the least square method. The final computational results demonstrate that the model accuracy is satisfactory, which will provide support for control parameters optimization.

Keywords: least square method; ball-beam system; mathematical model

1 引言

随着科技高速发展, 对于系统的控制精度、速度以及抗干扰性的要求也越来越高^[1]。因此, 对于新控制理论的研究和对传统控制方法的改进成为现代控制理论研究的非常重要部分。而球杆系统由于其自身的非线性^[2]等特点, 常用于检验控制参数、控制策略和控制理论的控制效果, 其中, 当控制策略已经设计完毕, 如何整定优化控制参数是控制系统设计的关键问题之一。

一般而言, 对系统进行优化设计的常用思路是先建立数学模型, 然后基于该模型应用一定的分析设计方法或优化方法进行优化设计。目前的建模控制方法多采用模糊

控制^[3]等现代控制方法。在对球杆系统控制参数和输出量进行建模时, 目前常用的方法虽然有着较高的建模精度, 但计算量较大且优化多个输出量时难以有良好的效果。基于实验室购置的球杆控制系统(固高科技 GBB1004), 通过 MATLAB^[4] 仿真软件对控制器输入(控制参数)-输出(系统响应)进行采样, 分别针对超调量、稳定时间以及二者线性加权 3 种控制指标, 应用最小二乘法建立多项式拟合方程^[5-6], 并应用 MATLAB 进行可视化。实验结果表明, 所建立模型精度高, 能够反映球杆系统控制输入-输出的映射关系, 为接下来对控制参数整定优化提供了模型支持。

收稿日期: 2015-08

2 最小二乘法原理

最小二乘法^[7-8]是重要的拟合方法,在曲面拟合、数学建模中有广泛应用。下面简要介绍最小二乘法的基本原理:

给出已知的部分数据点 $(x_k, y_k, z_k), k = 1, 2, \dots, n$ 作 m 次 ($m = n$) 的多项式:

$$z = \sum_{j=m}^0 \left(\sum_{i=j}^0 c_{i,j-i} x^i y^{j-i} \right) \quad (1)$$

使其总误差 Q 为最小值, Q 公式为:

$$Q = \sum_{k=1}^N \left[z_k - \sum_{j=m}^0 \left(\sum_{i=j}^0 c_{i,j-i} x_k^i y_k^{j-i} \right) \right]^2 \quad (2)$$

式中: Q 是关于 $c_{i,j} (i, j = 0, 1, \dots, m)$ 的函数, 式子共有 $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ 个未知量 $c_{i,j}$, 因此以上的问题可以转换为求多元函数的极值问题, 即 $c_{i,j-i}$ 应该满足 $\frac{\partial Q}{\partial c_{i,j-i}} = 0$, 因而有:

$$\sum_{k=1}^N \left\{ \left[z_k - \sum_{j=m}^0 \left(\sum_{i=j}^0 c_{i,j-i} x_k^i y_k^{j-i} \right) \right] x_k^i y_k^{j-i} \right\} = 0 \quad (3)$$

此处的 I, J 是变量 i, j 的某个值, 即:

$$\sum_{k=1}^N \left\{ \sum_{j=m}^0 \left(\sum_{i=j}^0 c_{i,j-i} x_k^{I+i} y_k^{J+j-I-i} \right) \right\} = \sum_{k=1}^N z_k x_k^I y_k^{J-I} \quad (4)$$

互相交换求和符号之后, 求出:

$$\sum_{j=m}^0 \left\{ \sum_{i=j}^0 c_{i,j-i} \left[\sum_{k=1}^N (x_k^{I+i} y_k^{J+j-I-i}) \right] \right\} = \sum_{k=1}^N z_k x_k^I y_k^{J-I} \quad (5)$$

式中: 有 $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ 个未知量 $c_{i,j} (i, j = 0, 1, \dots, m)$, 所以给出的已知点的数目 $N \geq \frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ 。将数据点代入(5)成为方程组, 并且方程组的系数矩阵的行列式的值不能为零。方程组求解后拟合的多项式便可表达出。

3 球杆系统简介

采用的球杆系统(固高科技 GBB1004)基于反馈控制原理, 在得到传感器信号后, 对信号进行处理分析, 然后给电机绕组施加适当的 PWM 电压信号, 使电机转动, 从而使小球稳定在所设定的位置上。具体实物如图 1 所示。

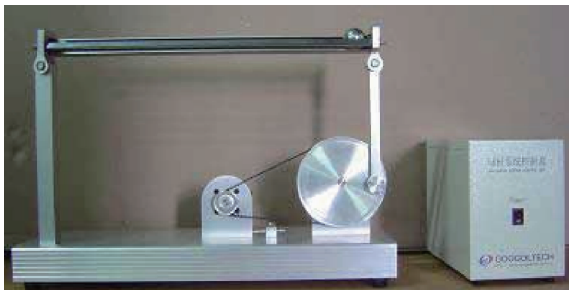


图 1 球杆系统

考虑到设备上进行采样运算存在一定偶然性且误差较大, 为了达到最理想的计算效果, 采用 MATLAB 中的球杆仿真系统。在 MATLAB 中, 球杆系统的仿真 M 文件如下:

```
m = 0.11;
R = 0.015;
g = -9.8;
L = 0.4;
d = 0.04;
J = 2 * m * R^2 / 5;
K = (m * g * d) / (L * (J / R^2 + m));
num = [-K];
den = [1 0 0];
ball = tf(num, den);
kp2 = 6;
kd2 = 6;
contrPD = tf([kd2 kp2], 1);
sys_cl_PD = feedback(contrPD * ball, 1);
t = 0 : 0.01 : 10;
subplot(3, 1, 2)
step(0.2 * sys_cl_PD, t)
```

通过改变 M 文件中的 $kp2, kd2$ 参数, 即可达到不同的控制效果。改变 $step$ 中的参数可以在仿真中设定小球的预定位置。具体操作如图 2 所示。

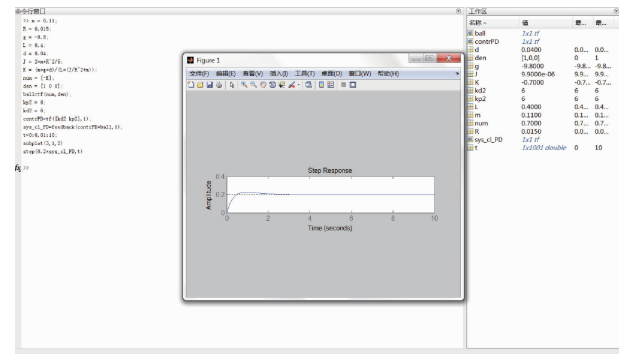


图 2 MATLAB 操作图像

4 基于最小二乘法的控制输入-输出建模方法

4.1 控制参数与系统响应的数据采集

在球杆系统的仿真模型^[9]中, 采用 PD 控制方法^[10-11], 取设定的位置为 200 mm 处。从 0~60 范围中按照均匀采样法取 40 组数据, 并随机抽取其中的 20 组进行最小二乘法的多项式拟合, 然后应用 MATLAB 进行可视化, 其具体的采样数据如表 1 所示。

表1 采集的样本数据

参数	序号				
	样本 1	样本 2	样本 3	样本 4	样本 5
P	10	20	30	40	50
D	10	10	10	10	10
δ	18	30	38	45	50
T_s	4.2	2.1	1.3	1.7	1.5

参数	序号				
	样本 6	样本 7	样本 8	样本 9	样本 10
P	60	10	20	30	40
D	10	20	20	20	20
δ	55	6	11	15	18
T_s	1.8	5.4	3.3	2.5	2.0

参数	序号				
	样本 11	样本 12	样本 13	样本 14	样本 15
P	50	60	10	20	30
D	20	20	30	30	30
δ	21	24	3	5	8
T_s	1.6	1.4	5.6	3.9	3.0

参数	序号				
	样本 16	样本 17	样本 18	样本 19	样本 20
P	40	50	60	10	20
D	30	30	30	40	40
δ	10	12	13	2	63
T_s	2.5	2.0	1.9	5.2	3.0

参数	序号				
	样本 21	样本 22	样本 23	样本 24	样本 25
P	20	30	40	50	60
D	40	40	40	40	40
δ	3	4	6	7	8
T_s	4.1	3.3	2.7	2.4	2.2

参数	序号				
	样本 26	样本 27	样本 28	样本 29	样本 30
P	10	20	30	40	50
D	50	50	50	50	50
δ	1	2	3	4	5
T_s	4.2	3.8	3.2	2.8	2.5

参数	序号				
	样本 31	样本 32	样本 33	样本 34	样本 35
P	60	10	20	30	40
D	50	60	60	60	60
δ	6	1	1	2	3
T_s	2.2	2.9	3.5	3.2	2.8

参数	序号				
	样本 36	样本 37	样本 38	样本 39	样本 40
P	50	60	5	5	40
D	60	60	5	20	5
δ	4	4	30	3	84
T_s	2.5	2.4	3.9	7.9	3.3

采用拟合的数据样本如表2所示。

表2 采用拟合的样本数据

参数	序号				
	样本 1	样本 2	样本 3	样本 4	样本 5
P	5	5	10	10	10
D	5	20	10	40	60
δ	30	3	18	2	1
T_s	3.9	7.9	4.2	5.2	2.9

参数	序号				
	样本 6	样本 7	样本 8	样本 9	样本 10
P	20	20	20	30	30
D	5	20	50	10	30
δ	63	11	2	38	8
T_s	3.0	3.3	3.8	1.3	3.0

参数	序号				
	样本 11	样本 12	样本 13	样本 14	样本 15
P	30	40	40	40	40
D	60	5	20	40	60
δ	2	84	18	6	3
T_s	3.2	3.3	2.0	2.7	2.8

参数	序号				
	样本 16	样本 17	样本 18	样本 19	样本 20
P	50	50	50	60	60
D	10	40	50	20	60
δ	50	7	5	24	4
T_s	1.5	2.4	2.5	1.4	2.4

表中, P 为控制参数的比例系数, D 为微分系数, δ 为超调量(mm), T_s 为稳定时间(s)。

4.2 基于最小二乘的多项式拟合

下面分别针对系统输出为超调量、稳定时间以及二者线性加权3种情况进行拟合。

1)超调量拟合

将 $p=[5\ 5\ 10\ 10\ 10\ 20\ 20\ 20\ 30\ 30\ 30\ 40\ 40\ 40\ 40\ 50\ 50\ 50\ 60\ 60]$;

$d=[5\ 20\ 10\ 40\ 60\ 5\ 20\ 50\ 10\ 30\ 60\ 5\ 20\ 40\ 60\ 10\ 40\ 50\ 20\ 60]$;

$z_1=[30\ 3\ 18\ 2\ 1\ 63\ 11\ 2\ 38\ 8\ 2\ 84\ 18\ 6\ 3\ 50\ 7\ 5\ 24\ 4]$;

输入到MATLAB中,并利用MATLAB中最小二乘法拟合模块进行运算,得出其多项式关系式为:

$$z_1 = 48.06 + 3.391x - 7.792y - 0.009708x^2 - 0.2171xy + 0.4129y^2 - 0.0008115x^3 + 0.001781x^2y + 0.004062xy^2 - 0.008513y^3 + 9.221 \times 10^{-6}x^4 - 3.761 \times 10^{-6}x^3y - 1.743 \times 10^{-5}x^2y^2 - 2.434 \times 10^{-5}xy^3 + 5.965 \times 10^{-5}y^4 \quad (6)$$

其三维图形如图3所示。

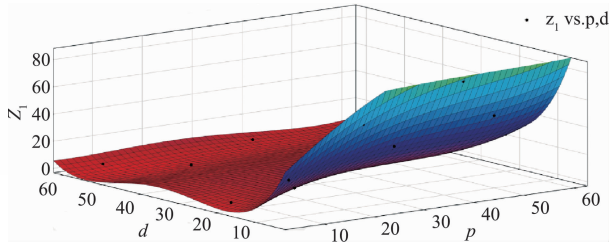


图3 超调量拟合图形

决定系数 R-square 为 0.995 3,校正后的决定系数为 0.982 0,二者近似于 1。将未参与拟合的 20 组数据代入关系式中,得出的超调量与仿真数值误差较小,说明拟合度较高。

2)稳定时间的拟合

将 $p=[5\ 5\ 10\ 10\ 10\ 20\ 20\ 20\ 30\ 30\ 30\ 40\ 40\ 40\ 40\ 50\ 50\ 50\ 60\ 60]$;

$d=[5\ 20\ 10\ 40\ 60\ 5\ 20\ 50\ 10\ 30\ 60\ 5\ 20\ 40\ 60\ 10\ 40\ 50\ 20\ 60]$;

$z_2=[3.9\ 7.9\ 4.2\ 5.2\ 2.9\ 3.0\ 3.3\ 3.8\ 1.3\ 3.0\ 3.2\ 3.3\ 2.0\ 2.7\ 2.8\ 1.5\ 2.4\ 2.5\ 1.4\ 2.4]$;

输入到 MATLAB 中,并利用最小二乘法模块进行拟合运算,得出多项式为:

$$z_2 = 3.962 - 0.250\ 4x + 0.319\ 4y + 0.015\ 08x^2 - 0.029\ 14xy + 0.006\ 926y^2 - 0.000\ 230\ 7x^3 - 4.357 \times 10^{-5}x^2y + 0.000\ 944\ 2xy^2 - 0.000\ 512\ 9y^3 + 9.871 \times 10^{-7}x^4 + 3.377 \times 10^{-6}x^3y - 5.05 \times 10^{-6}x^2y^2 - 5.301 \times 10^{-6}xy^3 + 4.91 \times 10^{-6}y^4 \quad (7)$$

三维图像如图 4 所示。

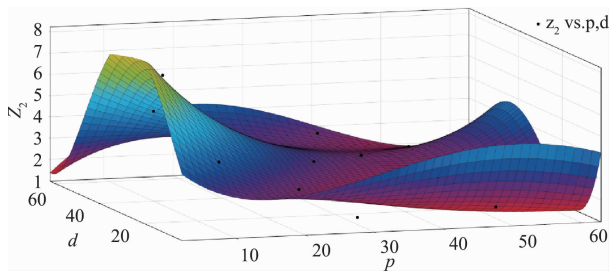


图4 稳定时间拟合图形

决定系数 R-square 为 0.958 1,校正后的决定系数为 0.840 8,二者近似于 1。将未参与拟合的 20 组数据代入关系式中,得出的稳定时间与仿真数值误差较小,说明拟合度较高。

3)加权算法下参数拟合分析

衡量控制效果有多个目标,本节采用线性加权的方法将超调量和稳定时间进行线性加权并与 P、D 参数进行多项式拟合,来进一步分析优化模型。根据经验试凑,取系数分别为 0.2 和 0.8,则加权关系式为:

$$z_3 = 0.2z_1 + 0.8z_2 \quad (8)$$

结果如表 3 所示。

表3 加权后的样本数据

参数	序号				
	样本 1	样本 2	样本 3	样本 4	样本 5
P	5	5	10	10	10
D	5	20	10	40	60
z ₃	9.12	6.92	6.96	4.56	2.52
参数	序号				
	样本 6	样本 7	样本 8	样本 9	样本 10
P	20	20	20	30	30
D	5	20	50	10	30
z ₃	15	4.84	3.44	8.64	4
参数	序号				
	样本 11	样本 12	样本 13	样本 14	样本 15
P	30	40	40	40	40
D	60	5	20	40	60
z ₃	2.96	19.44	5.2	3.36	2.84
参数	序号				
	样本 16	样本 17	样本 18	样本 19	样本 20
P	50	50	50	60	60
D	10	40	50	20	60
z ₃	11.2	3.32	3	5.92	2.72

将 $p=[5\ 5\ 10\ 10\ 10\ 20\ 20\ 20\ 30\ 30\ 30\ 40\ 40\ 40\ 40\ 50\ 50\ 50\ 60\ 60]$;

$d=[5\ 20\ 10\ 40\ 60\ 5\ 20\ 50\ 10\ 30\ 60\ 5\ 20\ 40\ 60\ 10\ 40\ 50\ 20\ 60]$;

$z_3=[9.12\ 6.92\ 6.96\ 4.56\ 2.52\ 15\ 4.84\ 3.44\ 8.64\ 4\ 2.96\ 19.44\ 5.2\ 3.36\ 2.84\ 11.2\ 3.32\ 3\ 5.92\ 2.72]$;

输入到 MATLAB 中,并利用最小二乘法模块进行拟合运算,得出多项式为:

$$z_3 = 12.78 + 0.477\ 9x - 1.303y + 0.010\ 12x^2 - 0.066\ 73xy + 0.088\ 12y^2 - 0.000\ 346\ 9x^3 + 0.000\ 321\ 3x^2y + 0.001\ 568xy^2 - 0.002\ 113y^3 + 2.634 \times 10^{-6}x^4 + 1.949 \times 10^{-6}x^3y - 7.525 \times 10^{-6}x^2y^2 - 9.108 \times 10^{-6}xy^3 + 1.586 \times 10^{-5}y^4 \quad (9)$$

其三维图形如图 5 所示。

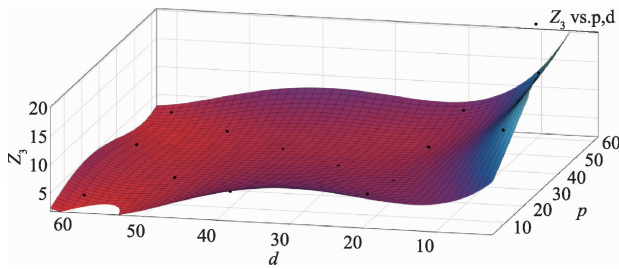


图5 加权算法下的拟合图形

决定系数 R-square 为 0.985 4, 校正后的决定系数为 0.944 7, 二者近似于 1。同样将未参与拟合的 20 组数据代入关系式中, 得出的 Z_3 与计算数值误差较小, 说明拟合度较高。

5 结 论

通过对超调量、稳定时间及线性加权后的参数进行多项式拟合, 同时利用 MATLAB 软件进行绘图, 从图中可以看出当 P 、 D 参数发生变化时, 图形会出现变化, 产生明显的凹凸现象。需要指出的是, 本文虽然以 PD 控制为例进行了讨论, 但建模思路适用于其他先进控制方法, 届时只需将系统输入设定为某控制方法的相关参数即可, 因此工作具有较好的通用性。

进一步的研究将集中在基于所建立的数学模型, 应用优化方法如遗传算法等对控制器参数进行寻优, 寻找出最优的点使得超调量及稳定时间达到最理想值, 从而达到球杆控制系统最优的自动控制状态。

参 考 文 献

- [1] 魏坤. 球杆平衡系统控制方法研究[D]. 长春: 长春工业大学, 2010.
- [2] 何朕, 王毅, 周长浩, 等. 球-杆系统的非线性问题[J]. 自动化学报, 2007, 33(5): 550-553.
- [3] 黎君, 阎世梁. 一级倒立摆模糊 PID 控制器设计[J]. 国外电子测量技术, 2012, 31(4): 50-52.

- [4] 龚纯, 王正林. 精通 MATLAB 最优化计算[M]. 北京: 电子工业出版社, 2014.
- [5] 霍晓程, 李小平. 用最小二乘法拟合曲面方程[J]. 赤峰学院学报, 2009, 25(6): 11-13.
- [6] 熊文卓, 孙明超. 采用最小二乘法提高变焦镜头的焦距值输出精度[J]. 仪器仪表学报, 2014, 35(增刊 1): 151-154.
- [7] 邓亮章. 最小二乘法的拟合及其应用[J]. 兰州教育学院学报, 2012, 28(8): 109-110.
- [8] 宋成军, 何玉珠. 基于最小二乘法的控制舱相位差测量技术[J]. 电子测量技术, 2014, 37(4): 138-141.
- [9] 固高科技(深圳)有限公司. 球杆系统 GBB1004 用户手册与实验指导书[Z]. 深圳: 固高科技有限公司, 2008.
- [10] 张松兰. PID 控制器参数整定[J]. 科技情报开发与经济, 2007, 17(28): 220-221.
- [11] YU W. Nonlinear PD regulation for ball and beam system[J]. International Journal of Electrical Engineering Education, 2009, 46(1): 59-73.

作 者 简 介

李志民, 1993 年出生, 本科生。主要研究方向为数据处理方法等。

E-mail: 18242366256@163.com

柳强, 1982 年出生, 工学博士, 副教授, 硕士生导师。主要研究方向为近似模型技术、多目标优化及其应用。

E-mail: neuliuqiang@163.com

张新权, 1980 年出生, 工学博士, 讲师。主要研究方向为切换系统等。

E-mail: zxq_19800126@163.com

赵志广, 1978 年出生, 工学硕士。主要研究方向为冶金自动化、数据处理等。

E-mail: 23908444@qq.com