

计算结构动力响应的样条插值高斯精细积分法

黄延凯 贺旭东 陈怀海

(南京航空航天大学机械结构力学与控制国家重点实验室 南京 210016)

摘要:针对传统精细积分法系统状态方程中的非齐次项求解涉及到等效激励矩阵求逆问题,同时计算精度取决于该非齐次项拟合程度问题,提出将高斯-勒让德积分法与样条插值函数结合起来求解状态方程非齐次项,方法中运用指数矩阵运算精确求解高斯积分系数,并采用分段样条插值函数确定每一时间步长内高斯积分点处离散载荷。分别采用 Newmark- β 法、传统精细积分法以及样条插值高斯精细积分法计算瑞利阻尼模型悬臂梁振动系统所受外载荷的时程响应,并与振型叠加法的计算结果比较。结果表明,样条插值高斯精细积分法具有高精度、高效率以及不受积分时间步长严格限制的优点。

关键词:动力响应;精细积分;高斯-勒让德积分;分段样条插值函数

中图分类号: TB123 TN06 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 130.2010

Spline interpolation Gaussian precise integration method of structural dynamic response

Huang Yankai He Xudong Chen Huaihai

(State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: About system state equation solution of the non-homogeneous term of the precise integration method which involves the matrix inversion and calculation accuracy depending on the non-homogeneous term fitting precision, an improved gaussian precise integration method, by combining the Gaussian-Legendre integration with the piecewise spline interpolation method, is proposed. In the new method, using the precise integration exponential matrix to solve the coefficient of the Gaussian integral precisely, and using the spline interpolation function to determine gauss integral points of discrete load within each time step length. Newmark- β method, the traditional precise integration method and the improved gaussian precise integration method of this artical were used respectively to calculate time response of the Rayleigh damping models cantilever beam system by external load, and compared with the calculation result of modal superposition method. The result demonstrates that the improved Gaussian precise integration method has high precision, high efficiency and is not limited strictly by the integral time step.

Keywords: dynamic response; precise integration; Gaussian-Legendre integration; piecewise spline interpolation function

1 引言

振动系统的动态特性是结构动力学分析领域中的一个重要问题。随着载荷和环境条件越来越恶劣,对于相关工程结构动态特性的求解越来越苛刻^[1]。一般振动方程在时域中的数值求解已有很多方法,如中心差分法、Houbolt 法、Wilson- θ 法、Newmark- β 法^[2]等。然而,这些数值方法有个共同的缺点是对时间步长敏感、精度不高。

钟万勰^[3]、LIN J H^[4]等创立了求解结构动力响应的

精细积分法,其充分发挥矩阵系数函数可以在计算机字长范围内精确计算的特点,能够给出结构动力响应的高精度解答,同时又具有无条件稳定性。但是,对于非齐次动力方程,精细积分法除了计算相应的指数矩阵,还要进行矩阵的求逆。矩阵求逆不仅计算量大,而且数值稳定性不好,在实际工程中还可能不存在逆矩阵的问题。因此,人们对非齐次项的处理做了大量研究,主要有两类方法:1)对非齐次项进行多项式函数拟合,假定非齐次项为常数、线性或其他形式^[5],这就会引起精细积分法的精度丧失;2)对非齐次动力方程进行增维处理,把非齐次项也

看作状态变量,从而将非齐次方程增维为齐次方程进行求解^[6],增维不仅扩大了系统维数,而且非齐次项使原定常系统转化为时变系统,在每一个积分步内都需要对增维矩阵进行一次精细积分,这就会显著增加计算量。这些问题的存在给算法的编程实现带来不便,限制了精细积分法的应用。

本文将精细积分法的基本原理与高斯-勒让德积分法、分段样条插值函数结合起来,建立了一个样条插值高斯状态方程直接积分格式。新的方法中只需进行指数矩阵运算,同时采用分段样条插值函数确定高斯积分点处离散载荷,积分过程中不必进行矩阵求逆,也无需对非齐次项进行复杂多项式函数拟合,整个积分方法精度取决于所选高斯积分点的数量以及样条插值函数的构建。通过求解瑞利阻尼悬臂梁振动系统动力响应,分析和比较了该方法和传统数值方法的计算效率和精度。

2 样条插值高斯精细积分法

2.1 基本公式推导

工程中的振动系统一般是具有连续分布参数的系统,但为便于分析人们在实际中往往将其简化为多自由度离散振动系统, n 自由度系统振动方程为^[7]:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}(0) = \dot{\mathbf{u}}_0 \end{cases} \quad (1)$$

式中: \mathbf{M} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{K} 分别为系统的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵,均为 $n \times n$ 方阵; $\mathbf{f}(t)$ 为作用于 n 个自由度上的外载荷,为 n 维列向量; $\mathbf{u}(t)$ 为 n 个自由度上的位移变量,为 n 维列向量。

取系统状态矢量:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t) \end{bmatrix}_{2n \times 1} \quad (2)$$

于是,原振动方程组可表示为:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{r} \\ \mathbf{x}_0 = [\mathbf{u}_0 \quad \dot{\mathbf{u}}_0]^T \end{cases} \quad (3)$$

式中:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \quad (4)$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f} \end{bmatrix}_{2n \times n} \quad (5)$$

在这里应注意,系统矩阵 \mathbf{A} 一般为非对称的实阵,式(3)就是振动系统的状态方程。在该连续时间系统的状态方程中,状态变量导数等于状态变量和激励的线性组合。

解式(3)得:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0(t) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{r}(\tau)d\tau \quad (6)$$

显然,上式中第一项表示系统对初始条件响应,第二项表示系统对外激励的响应。

为了便于数值求解和编程,把状态方程在时间上进行离散化,其要点是将时间划分为相等的小段 $\Delta t = t_1 -$

$t_0 = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots = t_{i+1} - t_i = \dots = t_n - t_{n-1}$,这里 $t_i = t_0 + i\Delta t (i = 1, 2, \dots, n+1)$ 是划分点,也称为采样点,而 n 是分段总数,然后,从初始状态矢量 $\mathbf{x}(t_0)$ 出发,逐步计算出系统的时间历程 $\mathbf{x}(t)$ 在各个采样点上的数值 $\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), \dots, \mathbf{x}(t_{n+1})$ ^[8]。

不失一般性,令 $t_0 = 0$,则 $t_i = i\Delta t$,取式(6)中的 $t = i\Delta t$,得:

$$\mathbf{x}(t_i) = e^{\mathbf{A} \cdot i\Delta t}\mathbf{x}(0) + \int_0^{i\Delta t} e^{\mathbf{A} \cdot (i\Delta t - \tau)}\mathbf{r}(\tau)d\tau \quad (7)$$

再取式(6)中 $t = (i+1)\Delta t$,得:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_{i+1}) = & e^{\mathbf{A} \cdot (i+1)\Delta t}\mathbf{x}(0) + \int_0^{(i+1)\Delta t} e^{\mathbf{A} \cdot ((i+1)\Delta t - \tau)}\mathbf{r}(\tau)d\tau = \\ & e^{\mathbf{A} \cdot \Delta t} \left[e^{\mathbf{A} \cdot i\Delta t}\mathbf{x}(0) + \int_0^{i\Delta t} e^{\mathbf{A} \cdot (i\Delta t - \tau)}\mathbf{r}(\tau)d\tau \right] + \\ & \int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t} e^{\mathbf{A} \cdot ((i+1)\Delta t - \tau)}\mathbf{r}(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (8)$$

由式(7)、式(8)可得 $\mathbf{x}(t_i)$ 、 $\mathbf{x}(t_{i+1})$ 的关系式为:

$$\mathbf{x}(t_{i+1}) = e^{\mathbf{A} \cdot \Delta t}\mathbf{x}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\mathbf{A} \cdot (t_{i+1} - \tau)}\mathbf{r}(\tau)d\tau \quad (9)$$

令:

$$\mathbf{T}(\Delta t) = e^{\mathbf{A} \cdot \Delta t} \quad (10)$$

则式(9)可表达为:

$$\mathbf{x}(t_{i+1}) = \mathbf{T}(\Delta t)\mathbf{x}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\mathbf{A} \cdot (t_{i+1} - \tau)}\mathbf{r}(\tau)d\tau \quad (11)$$

为了求取上式中积分项,引入高斯-勒让德积分式^[9]:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \sum_{j=0}^s L_j f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\theta_j\right) + E(f) \quad (12)$$

式中: θ_j 称为高斯积分点, L_j 称为高斯求积系数, $E(f)$ 称为误差余项。

令:

$$\tau = \frac{t_i + t_{i+1}}{2} + \frac{t_{i+1} - t_i}{2}\theta \quad (13)$$

把式(10)、式(12)、式(13)带入式(11)中,整理得:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_{i+1}) = & \mathbf{T}(\Delta t)\mathbf{x}(t_i) + \\ & \frac{\Delta t}{2} \sum_{j=0}^s L_j \mathbf{T}_j \left(\frac{\Delta t}{2}(1 - \theta_j) \right) \mathbf{r} \left(t_i + \frac{\Delta t}{2}(1 + \theta_j) \right) + \\ & O(\Delta t^{2s+2}) \end{aligned} \quad (14)$$

$O(\Delta t^{2s+2})$

式(14)是结构动力响应状态方程直接积分递推公式。显然,由式(14)计算得到的状态向量 $\mathbf{x}(t_{i+1})$ 的精度取决于时间步长 Δt 和高斯积分点的数目 s 。综合考虑积分精度和计算量并结合有限元中等参单元高斯积分计算的经^[10]取 $s = 2$ 。与之对应式(14)中的参数分别为:

$$\begin{aligned} L_0 = \frac{5}{9}, \mathbf{T}_0 = e^{\mathbf{A} \cdot \frac{\Delta t}{9}(1 + \sqrt{0.6})}, \theta_0 = -\sqrt{0.6} \\ L_1 = \frac{8}{9}, \mathbf{T}_1 = e^{\mathbf{A} \cdot \frac{\Delta t}{9}}, \theta_1 = 0 \\ L_2 = \frac{5}{9}, \mathbf{T}_2 = e^{\mathbf{A} \cdot \frac{\Delta t}{9}(1 - \sqrt{0.6})}, \theta_2 = \sqrt{0.6} \end{aligned} \quad (15)$$

2.2 指数矩阵的精细计算

传统精细积分法中计算指数矩阵,可利用指数函数的加法定理^[11]:

$$T(\Delta t) = e^{A\Delta t} = (e^{A\frac{\Delta t}{m}})^m \quad (16)$$

式中: m 为任意整数,这里选择 $m = 2^N$,如选择 $N = 20$,则 $m = 1\,048\,576$ 将是一个很大的数,相应地, $\Delta\tau = \Delta t/m$ 为非常小的时间段,利用 Taylor 展开有:

$$e^{A\Delta\tau} = I + A\Delta\tau + \frac{(A\Delta\tau)^2}{2!} + \frac{(A\Delta\tau)^3}{3!} + \frac{(A\Delta\tau)^4}{4!} + \dots \approx I + T_a \quad (17)$$

式中:

$$T_a = A\Delta\tau + \frac{(A\Delta\tau)^2}{2} \left[I + \frac{A\Delta\tau}{3} + \frac{(A\Delta\tau)^2}{12} \right] \quad (18)$$

当 $\Delta\tau$ 非常小时,保留到四阶项已经足够精确了。 T_a 为小量矩阵,与单位矩阵 I 相加后会成为尾数。计算机编程时单位阵不参与累加和乘法运算,将 T 阵作分解:

$$\begin{aligned} T &= (I + T_a)^m = (I + T_a)^{2^N} = \\ &= (I + T_a)^{2^{N-1}} \cdot (I + T_a)^{2^{N-1}} = \\ &= [(I + T_a)^{2^{N-2}} \cdot (I + T_a)^{2^{N-2}}] \cdot \\ &= [(I + T_a)^{2^{N-2}} \cdot (I + T_a)^{2^{N-2}}] = \dots \end{aligned} \quad (19)$$

这样的分解共有 N 次。由于:

$$(I + T_a) \cdot (I + T_a) = I + (2T_a + T_a \cdot T_a) \quad (20)$$

考虑到式(20)右端括号里表达式仍为小量,因此展开式(19)中的 N 次乘法可以改为先循环计算增量矩阵:

$$T_a \leftarrow 2T_a + T_a \cdot T_a \quad (21)$$

然后再计算

$$T = I + T_a \quad (22)$$

按照相同方法精确求得系数矩阵 T_0, T_1, T_2 。以上系数矩阵在编程实现中只需预先求得一次即可。

2.3 高斯积分点值的插值计算

在时间子区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 内,高斯积分点为 $r_0 = t_i + \frac{\Delta t}{2}(1 - \sqrt{0.6})$, $r_1 = t_i + \frac{\Delta t}{2}$, $r_2 = t_i + \frac{\Delta t}{2}(1 + \sqrt{0.6})$,引入分段样条插值函数计算该点处离散载荷,如式(23)^[9]:

$$\begin{aligned} S(t) &= M_i \frac{(t_{i+1} - t)^3}{6\Delta t} + M_{i+1} \frac{(t - t_i)^3}{6\Delta t} + \\ &+ \left(r_i - \frac{M_i \Delta t^2}{6} \right) \frac{(t_{i+1} - t)}{\Delta t} + \\ &+ \left(r_{i+1} - \frac{M_{i+1} \Delta t^2}{6} \right) \frac{(t - t_i)}{\Delta t} \end{aligned} \quad (23)$$

式中: M_i, M_{i+1} 分别为子区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 的两端点处的二阶导数值,采用三弯矩插值法获得。

2.4 计算步骤

样条插值高斯状态方程直接积分法的计算步骤如下:

- 1) 将激励 $f(t)$ 按照时间积分步长 Δt 进行分段离散;
- 2) 由式(2)确定系统初始状态向量 x_0 ;

3) 由式(4)确定系统矩阵 A ;

4) 由式(14)、式(15)确定高斯积分法中高斯积分点以及高斯积分系数;

5) 由式(17)、式(18)、式(21)、式(22)确定系数矩阵 T, T_0, T_1, T_2 ;

6) 在每一个时间段 $[t_i, t_{i+1}]$ 内,由三次样条插值函数确定各高斯积分点处的激励;

7) 由式(14)求取各离散时间点处系统状态向量,提取位移和速度响应;

8) 由式(3)求取各离散时间点处系统加速度响应。

3 算例分析

如图1所示梁长度 $l = 1\text{ m}$,横截面宽度 $b = 0.1\text{ m}$,横截面高度 $h = 0.01\text{ m}$,弹性模量 $E = 72 \times 10^9\text{ Gpa}$,质量密度 $\rho = 2.7 \times 10^3\text{ kg/m}^3$, $\alpha = 0.8$, $\beta = 1.0 \times 10^{-5}$ (α, β 为瑞利阻尼因子^[12])。将该梁均分为5个单元,有6个结点,采用4自由度平面梁单元进行计算,由于梁左端固定,系统实际自由度为10。

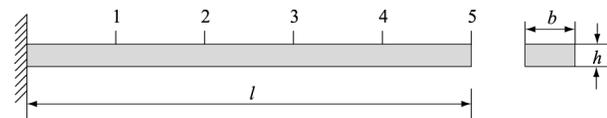


图1 悬臂梁振动系统示意

工况1,在第1结点挠度方向施加单位阶跃激励力 $f_1(t) = 1\text{ N}$,在第3结点挠度方向施加单位阶跃激励力 $f_2(t) = 1\text{ N}$;工况2,在第1结点挠度方向施加简谐激励力 $f_1(t) = 10 \cdot \sin(2\pi t)\text{ N}$,在第3结点挠度方向施加简谐激励力 $f_2(t) = 0.1 \cdot \sin(2\pi t)\text{ N}$;工况3,在第1结点挠度方向施加均值为0,均方根值为1的高斯白噪声激励^[13-14];系统初始条件为零,计算第5结点挠度方向的加速度响应。分别采取时间积分步长 $\Delta t = 1 \times 10^{-4}\text{ s}$, $\Delta t = 1 \times 10^{-3}\text{ s}$,运用 Newmark- β 法、传统精细积分法、本文样条插值高斯精细积分法以及振型叠加法计算,振型叠加法采用全部10阶振型进行计算,结果作为对比基准,其对比结果如图2、3和表3所示。

在工况1下,振动系统所受外界激励力为恒值,观察图2、图3发现,当时间积分步长较小时,3种数值方法结果与振型叠加法一致;但积分步长增大为原有步长10倍时,Newmark- β 法、传统精细积分法数值结果偏离振型叠加法,而样条插值高斯积分法依然保持与振型叠加法一致。同时由表1可知,由于所受激励力保持不变,Newmark- β 法、传统精细积分法数值结果与精确解误差相对较小,保持在1%以下。但是提高积分步长,该误差会明显增大,也即以上两种数值方法对积分步长很敏感,提高积分步长会导致精度下降。本文样条插值高斯积分法在恒值激励下,采用同等积分步长以及增大相应倍数积分步长依然保持很高的数值精度。

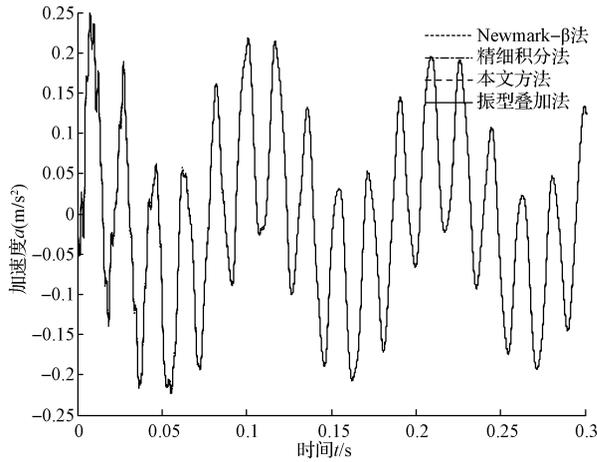


图2 工况1中第5自由度加速度
响应时程($\Delta t = 1 \times 10^{-4}$ s)

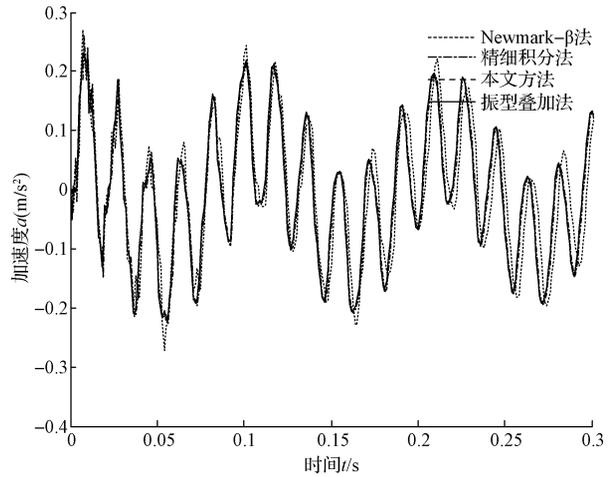


图3 工况1中第5自由度加速度
响应时程($\Delta t = 1 \times 10^{-3}$ s)

表1 工况1中第5自由度不同算法加速度响应

时间(s)	积分步长 Δt (s)	精确解	Newmark- β 法	精细积分法	样条插值精细积分法
0.2	10^{-4}	-0.065 826 4	-0.065 505 2	-0.065 857 5	-0.065 826 4
	10^{-3}	-0.065 826 4	-0.067 589 1	-0.066 308 2	-0.065 863 1
0.4	10^{-4}	-0.108 373 8	-0.109 181 6	-0.109 036 6	-0.108 373 8
	10^{-3}	-0.108 373 8	-0.110 358 9	-0.109 961 7	-0.108 310 3
0.6	10^{-4}	-0.132 423 5	-0.133 368 5	-0.133 285 5	-0.132 423 5
	10^{-3}	-0.132 423 5	-0.140 125 7	-0.138 424 5	-0.132 460 1
0.8	10^{-4}	-0.112 239 1	-0.112 592 8	-0.112 337 3	-0.112 239 1
	10^{-3}	-0.112 239 1	-0.110 357 4	-0.110 147 4	-0.112 275 7
$\Delta t = 10^{-4}$ 的最大误差(%)			0.7	0.8	0.001
$\Delta t = 10^{-3}$ 的最大误差(%)			2.8	2.5	0.005

在工况2下,振动系统所受外界激励为简谐力,观察图4、图5发现,当时间积分步长较小时,3种数值方法结果与振型叠加法一致;但积分步长增大为原有步长10倍

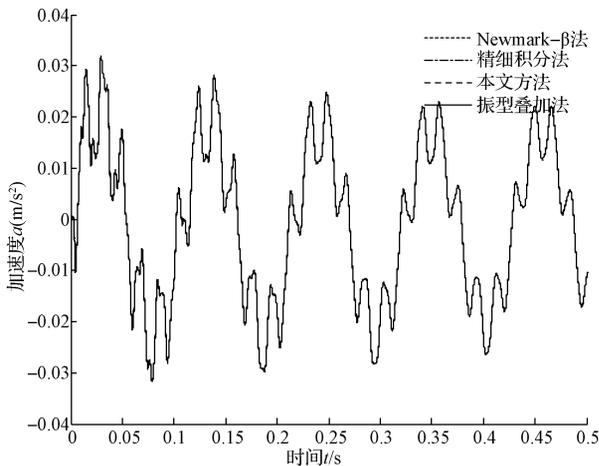


图4 工况2中第5自由度加速度
响应时程($\Delta t = 1 \times 10^{-4}$ s)

时,Newmark- β 法、传统精细积分法数值结果偏离振型叠加法,而样条插值高斯积分方法依然保持与振型叠加法一致。同时由表2可知,由于所受简谐激励力,传统精

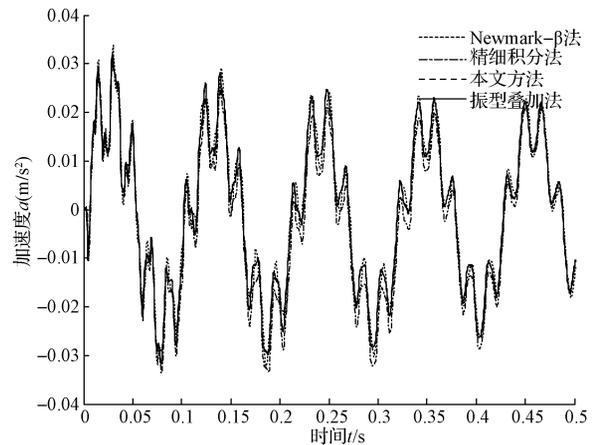


图5 工况2中第5自由度加速度
响应时程($\Delta t = 1 \times 10^{-3}$ s)

细积分法中需对激励进行多项式函数拟合,造成相应的数值误差。当提高积分步长时,该误差会急剧增大,也即 Newmark- β 法、传统精细积分法数值方法对处理时变载荷能力有限,同时提高积分步长亦会导致精度下降。本

文样条插值高斯积分法中避免了对所受激励力多项式拟合造成的误差,在同等积分步长以及增大相应倍数积分步长下依然保持很高的数值精度。

表2 工况2中第5自由度不同算法加速度响应

时间(s)	积分步长 Δt (s)	精确解	Newmark- β 法	精细积分法	样条插值精细积分法
0.2	10^{-4}	-0.018 164 2	-0.018 294 9	-0.018 277 5	-0.018 119 3
	10^{-3}	-0.018 164 2	-0.019 168 9	-0.018 987 9	-0.018 118 3
0.4	10^{-4}	-0.023 009 1	-0.023 140 3	-0.023 000 9	-0.023 132 8
	10^{-3}	-0.023 009 1	-0.023 391 3	-0.023 099 8	-0.022 744 8
0.6	10^{-4}	-0.009 858 3	-0.009 767 1	-0.009 731 2	-0.009 845 5
	10^{-3}	-0.009 858 3	-0.009 358 1	-0.009 427 9	-0.009 812 5
0.8	10^{-4}	0.005 151 5	0.005 185 3	0.005 174 4	0.005 151 5
	10^{-3}	0.005 151 5	0.005 349 8	0.005 215 2	0.005 151 1
$\Delta t = 10^{-4}$ 的最大误差(%)			0.9	1.2	0.001
$\Delta t = 10^{-3}$ 的最大误差(%)			4.5	4.3	0.003

在工况3下,振动系统所受外界激励力为高斯正态分布的随机激励,观察图6、图7发现,当时间积分步长较小时,3种数值方法结果与振型叠加法基本保持一致;但积分步长增大为原有步长10倍时,Newmark- β 法、传统精细积分法数值结果偏离振型叠加法,而样条插值高斯积分法依然保持与振型叠加法一致。同时由表3可知,由于

所受随机激励力,Newmark- β 法、传统精细积分法数值结果与精确解误差相对较大。提高积分步长,该误差亦会明显增大,也即以上两种数值方法对积分步长很敏感的同时,对高斯随机载荷的处理精度不够。本文样条插值高斯积分法采用样条插值函数处理高斯离散载荷,在保证数值结果高精度的同时,可以提高积分步长以减少计算量。

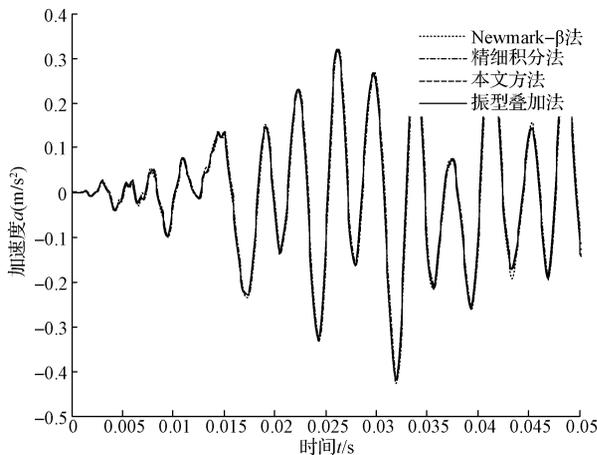


图6 工况3中第5自由度加速度
响应时程($\Delta t = 1 \times 10^{-4}$ s)

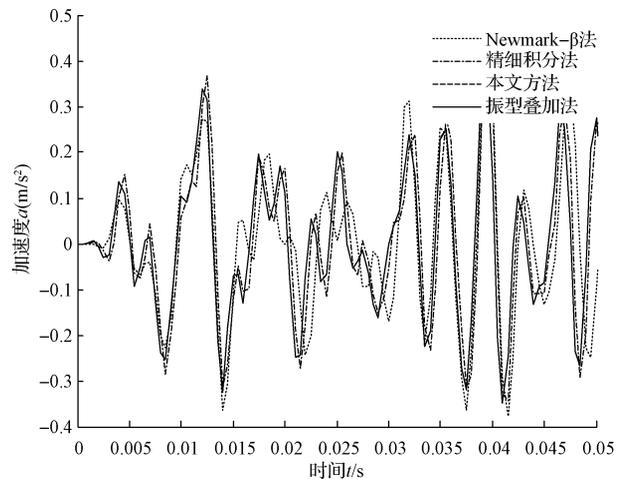


图7 工况3中第5自由度加速度
响应时程($\Delta t = 1 \times 10^{-3}$ s)

表3 工况3中第5自由度不同算法加速度响应

时间(s)	积分步长 Δt (s)	精确解	Newmark- β 法	精细积分法	样条插值精细积分法
0.2	10^{-4}	0.009 133 3	0.009 532 4	0.009 326 2	0.009 116 7
	10^{-3}	0.009 133 3	0.008 354 7	0.008 825 9	0.009 125 4
0.4	10^{-4}	0.038 389 2	0.037 302 5	0.037 924 8	0.038 340 1
	10^{-3}	0.038 389 2	0.033 302 5	0.035 924 8	0.038 410 2
0.6	10^{-4}	-0.087 488 7	-0.084 517 1	-0.089 545 7	-0.087 801 9
	10^{-3}	-0.087 488 7	-0.081 098 7	-0.083 249 5	-0.087 089 9
0.8	10^{-4}	-0.025 241 3	-0.026 115 5	-0.026 320 2	-0.025 273 8
	10^{-3}	-0.025 241 3	-0.020 534 9	-0.021 594 8	-0.025 289 7
$\Delta t = 10^{-4}$ 的最大误差(%)			2.3	2.2	0.001
$\Delta t = 10^{-3}$ 的最大误差(%)			8.6	5.8	0.008

4 结 论

上述理论推导和算例分析表明,样条插值高斯精细积分法避免了逆矩阵的计算,更适应于容易产生系统矩阵奇异的大型多自由度结构,又避免了对非齐次项进行多项式函数拟合造成的计算精度损失。相对 Newmark- β 法、传统精细积分法,在同等时间积分步长下,本文方法精度较高;在保证计算精度的同时,可以通过增加积分步长来减小计算量,提高了计算效率,同时,对于随机离散载荷的处理分段样条插值函数方法更加精确可靠。

参 考 文 献

- [1] 刘大龙,陈怀海,旭东,等.一种微型激振器研究[J].国外电子测量技术,2014,33(11):43-46.
- [2] 克拉夫 R W,彭津 J.结构动力学[M].第二版.王光远,译.北京:高等教育出版社,2006.
- [3] 钟万勰.结构动力方程的精细时程积分法[J].大连理工大学学报,1994,34(2):131-135.
- [4] LIN J H, SHEN W P, WILLIAMS F W. A high precision direct integration scheme for structures subjected to transient dynamic loading[J]. Computer & Structures, 1995, 56(1): 130-120.
- [5] 王超,李红云,刘正兴,等.计算结构动力响应的分段精细时程积分方法[J].计算力学学报,2003,20(2):175-178,203.
- [6] 张继峰,邓子辰.结构动力方程的增维分块精细积分

法[J].振动与冲击,2008,27(12):88-90,106.

- [7] 胡海岩.机械振动基础[M].北京:北京航空航天大学出版社,2005.
- [8] 师汉民.机械振动系统—分析、测试、建模、对策(下册)[M].武汉:华中科技大学出版社,2004.
- [9] 徐士良.数值方法与计算机实现[M].北京:清华大学出版社,2010.
- [10] 潘玉华,王元丰.复阻尼结构动力方程的高斯精细时程积分法[J].工程力学,2012,29(2):16-20.
- [11] 张雄,王天舒,刘岩.计算动力学[M].第二版.北京:清华大学出版社,2015.
- [12] 李嘉全,程志峰.用于主动减振的振动信号实时高精度检测[J].电子测量与仪器学报,2013,27(12):1134-1140.
- [13] 梁兵,汪同庆.基于 HHT 的振动信号趋势项提取方法[J].电子测量技术,2013,36(2):119-122.
- [14] 杨辉跃,涂亚庆,张海涛,等.一种基于 SVD 和 Hilbert 变换的科氏流量计相位差测量方法[J].仪器仪表学报,2012,33(9):2101-2107.

作 者 简 介

黄延凯,1991年出生,硕士研究生,主要研究方向为结构动力学仿真。

E-mail: ykhuang20131@163.com

贺旭东,副教授,研究生导师,主要研究方向为振动试验控制系统。