

一种改进的频谱修正法

王欣欣 陈怀海

(南京航空航天大学振动工程研究所 南京 210016)

摘要:针对信号快速傅里叶变换中非整周期截断采样而造成的频谱泄露问题,提出了一种基于平顶自卷积窗的相位差校正方法。首先利用平顶自卷积窗对信号进行加权以抑制频谱泄露,其次利用相位差校正法得到频率和相位的计算公式,最后通过反推法得到对幅值修正的多项式公式。将使用汉宁窗、布莱克曼窗、布莱克曼-哈里斯窗的相位差校正法与本文提出的方法进行了对比分析,仿真结果表明加平顶自卷积窗的方法对信号参数估计准确度更高。

关键词:频谱分析;平顶自卷积窗;幅值修正

中图分类号: TN911.72 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 510.4020

Improved spectrum correction method

Wang Xinhuan Chen Huaihai

(Institute of Vibration Engineering Research, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: A phase difference correction method with the Flat-top self-convolution window is proposed in the article to solve the spectral leakage problem in FFT due to the non-integral-period signal sampling. Firstly, the Flat-top self-convolution window is used to weight the sampled signal to suppress the spectrum leakage. Then, the formula for the calculation of frequency and phase of the signal are derived by the phase difference correction method. Finally, an approach by inverse derivation for the spectral amplitude correction with modified polynomials is set forth. A simulating example with Hanning window, Blackman window, Blackman-Harris window and Flat-top self-convolution window respectively is given and the results show that the method proposed in this paper is the best.

Keywords: spectral analysis; flat-top self-convolution window; amplitude correction

1 引言

自1965年Cooley和Tukey提出FFT以来,离散频谱分析实现了信号处理从时域到频域的转变,FFT成为数字信号分析的基础,应用于机械^[1]、电子、仪器仪表等众多领域。但由于计算机只能对有限多样本进行分析,频谱分析也只能在有限区间进行,这就不可避免地存在由于时域截断产生的能量泄露的问题,使得离散频谱的幅值、相位和频率都有可能产生较大的误差,在工程应用中造成障碍。针对该问题,国内外学者对提高频谱分析精度、减少泄露问题进行了研究,并提出了多种有效办法,例如插值法^[2-3]、能量重心法^[4]、相位差校正法^[5]等。大量文章采用汉宁窗、布莱克曼窗,布莱克曼-哈里斯窗^[6]等主瓣宽度较窄,旁瓣衰减快的窗函数,并利用多根谱线^[7-8]进行分析。本文通过选用

主瓣宽度较宽的顶部极其平滑的平顶自卷积窗并基于时域平移校正法进行频谱分析,文中对幅值修正提出了一种新的算法。通过仿真实例表明该方法对于单频信号和间隔较大的多频信号可以有效地提高频谱估计精度。

2 频谱泄露和栅栏效应

2.1 栅栏效应

时域信号加窗后作FFT得到的频谱是离散谱,其本质是信号的频谱与一个窗函数的频谱作复卷积后,按归一化频率分辨率等间隔频域采样的结果。当采样总长度为信号周期的整数倍时,信号频率与离散频率点重合。当采样总长度不是信号周期的整数倍时,信号频率与离散频率点存在偏差,信号真正的谱线处于两条相邻谱线间,无法被直接观测,该现象称为栅栏效应。

2.2 频谱泄露

以单一频率的正弦信号为例,假设一个频率为 f_0 ,幅值为 A ,初相位为 φ_0 的单一频率信号 $x(t)$,即:

$$x(t) = A_0 \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0) \quad (1)$$

根据傅里叶变换可得:

$$X(f) = \frac{A_0}{2} [\delta(f - f_0)e^{j\varphi_0} + \delta(f + f_0)e^{-j\varphi_0}] \quad (2)$$

此时信号的频谱是频点 $\pm f_0$ 处的两根谱线。但在实际测量中只能选择一段时间信号进行分析,即对信号进行加窗处理。信号在时域内与窗函数相乘: $x(t)_w = x(t) \cdot \omega(t)$,截断后信号的频谱由卷积定理求出,其频谱为:

$$X_w(f) = X(f) \cdot W(f) = \frac{A_0}{2} [W(f - f_0)e^{j\varphi_0} + W(f + f_0)e^{-j\varphi_0}] \quad (3)$$

式中: $W(f)$ 为窗谱函数。

对信号加窗,可以使得截断处的信号变得连续光滑,减少能量的损失。但是加窗后频谱不完全集中在主瓣内,而是在整个频率轴上向两边蔓延,旁瓣的存在会对相邻频点的主瓣造成干扰,频率特性发生改变,使频谱计算结果存在误差,这就是频谱泄露现象。

3 窗函数的特性

加窗可以减小因采样总长度不是信号周期的整数倍而造成的频谱分析误差,提高分析精度。对窗函数进行时域卷积,使得主瓣变宽,谱峰变平缓,旁瓣性能更加良好^[9]。

任意两个时域信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$,两者做卷积的运算定义为:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau = x_1(t) \cdot x_2(t) \quad (4)$$

对离散信号处理时,其卷积积分表现为卷积和的过程:

$$y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m) \cdot x_2(n - m) \quad (5)$$

平顶自卷积窗为若干个平顶窗进行自卷积运算的结果,即:

$$\omega_p(t) = \underbrace{\omega_p(t) \cdot \omega_p(t) \cdot \dots \cdot \omega_p(t)}_m \quad (6)$$

式中: m 为参与卷积的平顶窗的个数,称为窗的阶数。本文仅研究阶数为 2 的情况。

首先,平顶窗^[10-11]的时域 $\omega(t)$ 的离散序列表达式:

$$\omega(n) = a_0 - a_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) - a_3 \cos\left(\frac{6\pi n}{N-1}\right) + a_4 \cos\left(\frac{8\pi n}{N-1}\right) \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (7)$$

根据定义得自卷积窗的频域表达式为:

$$W_{2F}(k) = (W_F(k))^2 = \left(W_R(k) - \frac{a_1}{2} [W_R(k-1) + W_R(k+1)] + \frac{a_2}{2} [W_R(k-2) + W_R(k+2)] - \frac{a_3}{2} [W_R(k-3) + W_R(k+3)] + \frac{a_4}{2} [W_R(k-4) + W_R(k+4)] \right)^2 \quad (8)$$

式中:

$$W_R(k) = \frac{\sin(\pi k)}{\sin(\frac{\pi k}{N})} \exp[-j \frac{(N-1)\pi k}{N}]$$

图 1 给出了长度为 $N=128$ 的 4 种窗的幅频响应曲线。通过图 1 可以看出相比于其他 3 种窗平顶自卷积窗的主瓣宽度最宽,旁瓣峰值衰减最大,达到 -150 dB。

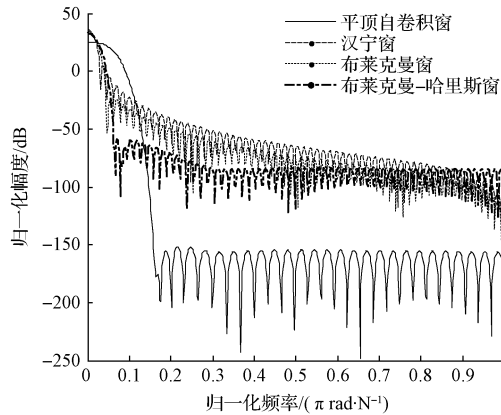


图 1 4 种窗函数的幅频响应

4 相位差校正法

4.1 时域平移校正法

本文采用的时域平移校正法^[5]是相位差校正法中的一种,由丁康等人在 2002 年提出。该方法步骤是首先将采样时域序列前 N 点构造第一段序列 $x_0(n)$,然后从采样序列的第 L 点开始,取 N 点作为第二段序列,分别对两段序列进行 FFT 分析,最后利用两段对应峰值谱线的相位差进行频谱校正。

单频信号采用该方法得到的频率、幅值、相位的修正公式为:

$$f = (i + \delta) \cdot df, A = \frac{y_i}{W(\delta)}, \theta = \arctan\left(\frac{I_i}{R_i}\right) + \pi\delta \quad (9)$$

式中: δ 为频率校正量, y_i 为峰值谱线号 i 对应的第一段序列 FFT 分析的幅值, I_i , R_i 分别为信号 FFT 的实部和虚部。 $W(\delta)$ 为归一化窗函数的频谱模函数,表达式如下:

$$W(\delta) = \frac{\sin(\pi\delta)}{2\pi} \cdot \left\{ \frac{c_0}{|\delta|} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M c_k \left(\frac{1}{|\delta| + k} + \frac{1}{|\delta| - k} \right) \right\} \quad (10)$$

4.2 改进的幅值修正

传统的相位差校正法是利用窗谱模函数进行幅值修正,从式(10)可以看出传统的相位差校正法的幅值修正方法在窗函数比较复杂的情况下,其计算公式是比较繁琐的。针对该现象本文对幅值修正提出一种简明直观的修正方法。

假设信号幅值为 A ,对信号加窗作 FFT 后峰值谱线

对应的幅值为 y_{\max} ，那么相对误差为：

$$v = \frac{A - y_{\max}}{A} \quad (11)$$

由于 v 与频偏 δ 之间存在幂次方关系，因此设其形式如下：

$$v(\delta) = \sum_{i=1}^M a_i \delta^{2i} \quad (12)$$

式中：系数 a_i 通过曲线拟合得到如表 1 所示的修正系数。因此可以根据公式求得幅值：

$$A = \frac{y_{\max}}{1 - v(\delta)} \quad (13)$$

该方法不需要对窗函数求模，减少了公式的复杂运算，并且可以提高幅值的估计精度。

表 1 幅值修正系数

窗函数	a_1	a_2
汉宁窗	0.655 6	-0.159 8
布莱克曼窗	0.500 7	-0.105 3
布莱克曼-哈里斯窗	0.377 8	-0.063 36
平顶自卷积窗	-0.003 56	0.005 885

5 仿真分析

5.1 算法验证

仿真实验所采用的信号模型表达式为：

$$y = A_1 \sin(2\pi n f_1 / f_s + \varphi_1), n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (14)$$

式中： A_1 从 12.5 开始，以 0.1 为步长，取 400 次， f_1 以 30 开始，以 0.1 为步长，增加至 70， φ_1 为 44° 。本文取 $f_s = 5120$ Hz， $N = 1024$ ， $df = 5$ Hz。对汉宁窗^[12]，布莱克曼窗，布莱克曼-哈里斯窗以及平顶自卷积窗 4 种窗采用两种方法进行幅值修正，方法 1 表示窗函数的频谱模函数的幅值修正方法，方法 2 表示利用修正多项式的方法对幅值进行修正。通过图 2~图 5，可以看出通过方法 2 幅值修正误差更小。

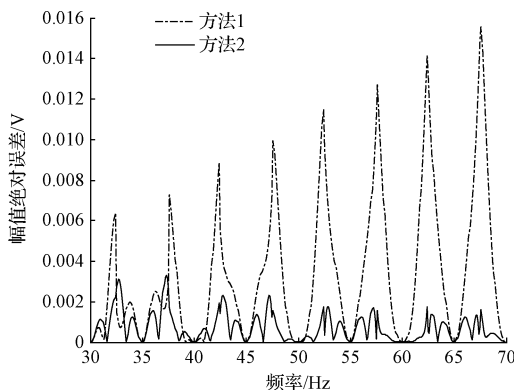


图 2 加汉宁窗幅值绝对误差比较

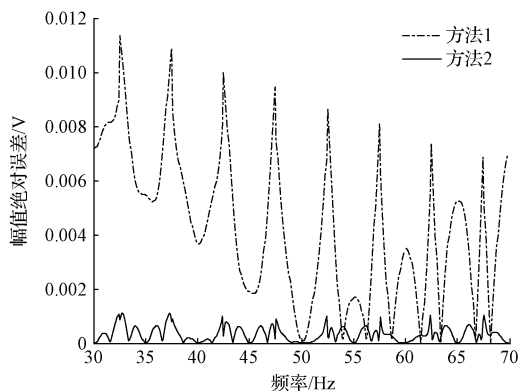


图 3 加布莱克曼窗幅值绝对误差比较

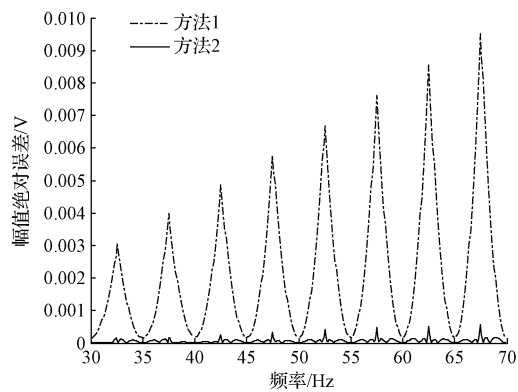


图 4 加布莱克曼-哈里斯窗幅值绝对误差比较

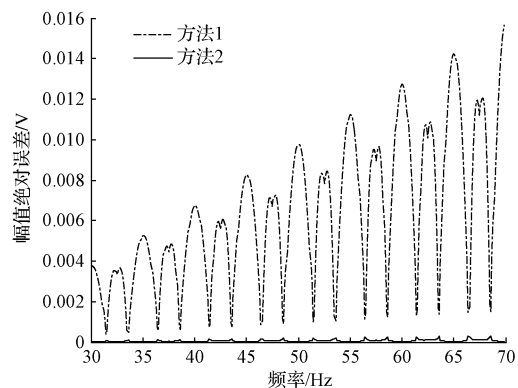


图 5 加平顶自卷积窗幅值绝对误差比较

图 6~图 8 是加汉宁窗、布莱克曼窗以及布莱克曼-哈里斯窗 3 种窗，在相位差校正法基础上修正后的频率、幅值以及相位误差图。图 9~11 是平顶自卷积窗修正后的频率、幅值和相位误差图。从上述图中，可以看出对于频率的修正，使用平顶自卷积窗其估计精度最高，误差百分比达到 10^{-11} ，幅值的修正误差百分比达到 10^{-6} ，相位误差在 0.5° 以内。

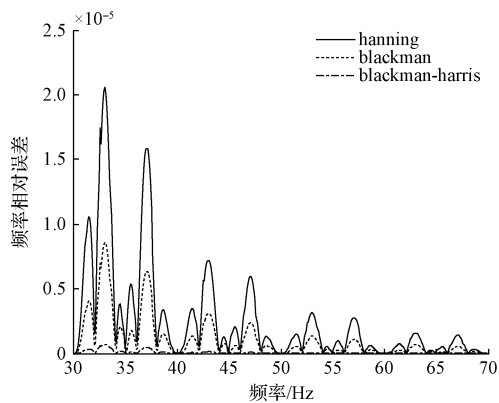


图6 频率相对误差比较

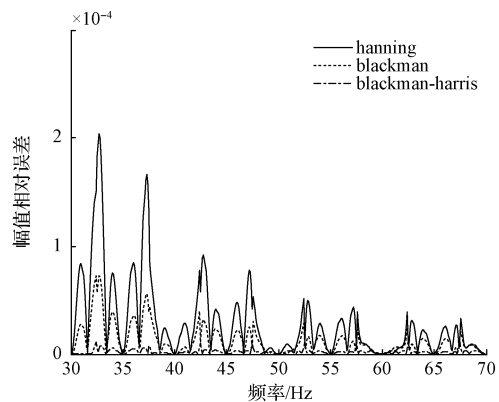


图7 幅值相对误差比较

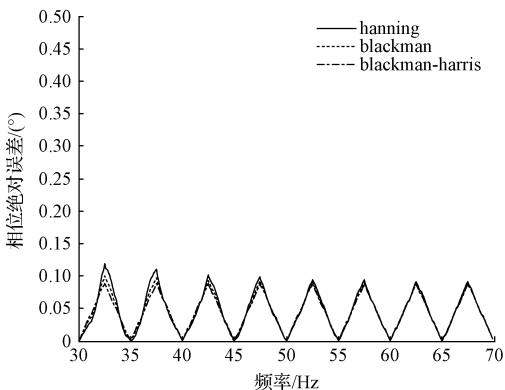


图8 相位绝对误差比较

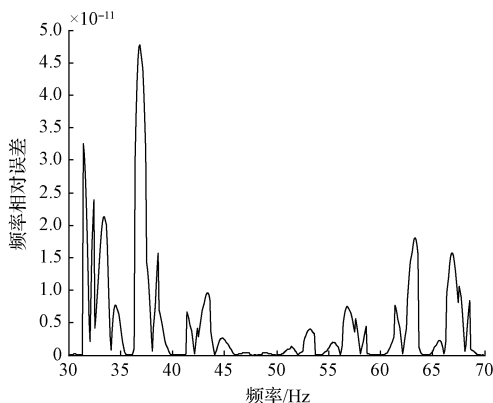


图9 加平顶自卷积分窗频率相对误差

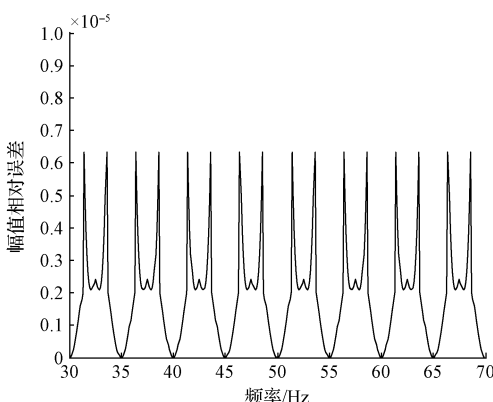


图10 加平顶自卷积分窗幅值相对误差

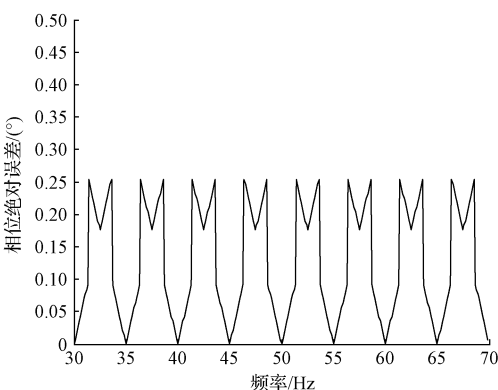


图11 加平顶自卷积分窗相位绝对误差

5.2 多频信号的仿真

为了验证本算法,采用 MATLAB 对多频信号进行仿真。表 2 包含信号的频率、幅值以及相位。采样频率为 5 120 Hz,采用点数为 1 024,频率分辨率为 5 Hz。

基于时域平移校正算法,在分别加汉宁窗、布莱克曼窗、布莱克曼-哈里窗以及平顶自卷积窗的情况下,频率、幅值和相位的误差结果如表 3、表 4 和表 5 所示。通过表 3 可以看出平顶自卷积窗的频率误差百分比达到 10^{-8} ,相比于其他窗高出 3 个量级。表 4 可以看出平顶自卷积窗的幅值检测精度相对于其他窗函数较高。表 5 中平顶自

表 2 信号频率、幅值和相位

序号	频率/Hz	幅值/V	相位(°)
1	59.0	120	150
2	120.4	69	103
3	169.7	37	90
4	235.3	23	68
5	312.1	18	37
6	414.5	9	15
7	494.8	3	4

表3 频率误差 (Hz)

序号	汉宁窗	布莱克曼窗	布莱克曼-哈里斯窗	平顶自卷积窗
1	5.7E-5	2.0E-5	1.6E-6	2.0E-10
2	3.8E-4	1.7E-4	1.5E-5	9.1E-10
3	4.8E-4	2.6E-4	3.6E-5	8.0E-9
4	3.5E-4	1.1E-4	1.8E-5	6.2E-9
5	4.4E-5	2.9E-5	1.8E-5	2.5E-9
6	6.7E-5	1.5E-5	2.8E-5	1.6E-8
7	1.1E-4	2.2E-5	7.1E-5	2.7E-8

表4 幅值误差 (V)

序号	汉宁窗	布莱克曼窗	布莱克曼-哈里斯窗	平顶自卷积窗
1	6.0E-3	2.9E-3	4.3E-4	2.0E-3
2	1.2E-2	5.1E-3	4.8E-4	1.8E-5
3	6.4E-4	6.7E-4	2.3E-4	5.4E-6
4	1.2E-3	6.3E-4	7.0E-5	3.4E-6
5	5.7E-4	2.3E-4	3.5E-5	5.0E-5
6	1.4E-4	6.3E-5	6.4E-5	3.5E-6
7	2.0E-4	5.4E-5	5.9E-5	1.9E-7

表5 相位误差 (°)

序号	汉宁窗	布莱克曼窗	布莱克曼-哈里斯窗	平顶自卷积窗
1	0.037 6	0.036 1	0.035 2	0.281 2
2	0.028 3	0.020 3	0.014 7	0.028 1
3	0.030 6	0.021 8	0.012 1	0.021 1
4	0.025 6	0.015 5	0.011 1	0.021 1
5	0.076 1	0.075 3	0.074 6	0.147 0
6	0.018 2	0.018 6	0.019 0	0.035 1
7	0.003 7	0.006 9	0.010 1	0.014 0

卷积窗的相位误差低于 0.5°, 误差与其他窗相比基本持平。

6 结论

本文根据窗函数的特性, 将幅值特性比较明显的平顶自卷积窗结合相位差校正法进行信号分析, 该方法对频率、幅值以及相位估计精度较高。通过反推思想推导出幅值修正的多项式公式。仿真算例结果表明, 采用本文提出的幅值修正方法相比于基于窗谱模函数的校正方法, 具有更高的计算精度。但是当采用平顶自卷积窗进行多频信号频谱分析时, 多频信号频率之间应当具有一定的间隔。

因此如何应用本文提出的方法对频率成分过于密集的信号进行离散频谱分析校正成为后续研究的问题。

参考文献

- [1] 周成刚, 顾环云, 张煜昕, 等. 基于频谱分析的传动减速箱故障诊断技术研究[J]. 国外电子测量技术, 2012, 31(4): 28-30.
- [2] OFFELLI C, PETRI D. The influence of windowing on the accuracy of multifrequency signal parameter estimation[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 1992, 41(2): 256-261.
- [3] KANG D, MING X, XIAOFEI Z. Phase difference correction method for phase and frequency in spectral analysis[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2000, 14(5): 835-843.
- [4] 丁康, 江利旗. 离散频谱的能量重心校正法[J]. 振动工程学报, 2001, 14(3): 354-358.
- [5] 丁康, 罗江凯, 谢明. 离散频谱时移相位差校正法[J]. 应用数学和力学, 2002, 23(7): 729-735.
- [6] 周西峰, 赵蓉, 郭前岗. Blackman-Harris 窗的插值 FFT 谐波分析与应用[J]. 电测与仪表, 2014, 51(11): 81-85.
- [7] 张鸿博, 蔡晓峰, 鲁改凤. 基于双窗全相位 FFT 双谱线校正的电力谐波分析[J]. 仪器仪表学报, 2015, 36(12): 2835-2841.
- [8] 蔡晓峰, 张鸿博, 鲁改凤. 应用三谱线插值 FFT 分析电力谐波的改进算法[J]. 电力系统保护与控制, 2015(2): 33-39.
- [9] 张介秋, 梁昌洪, 陈砚圃. 卷积窗及其在电力系统参量估计中的应用[J]. 电子学报, 2004, 32(12): 2013-2016.
- [10] 严晓丹, 王军, 方春恩, 等. 一种改进的 Flat-top 窗电力系统谐波分析算法[J]. 电力系统保护与控制, 2012, 40(8): 49-56.
- [11] 林达斌, 江亚群, 黄纯, 等. 基于 Flat-top 窗的双谱线相位差频率测量算法[J]. 计算机应用研究, 2012, 29(6): 2117-2119.
- [12] 丁康. 离散频谱分析校正理论与技术[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

作者简介

王欣欢, 1991 年出生, 硕士研究生。主要研究方向为振动分析。

陈怀海, 教授, 博士生导师。主要研究方向为振动试验控制系统, 结构动力学。

E-mail: chhnuaa@nuaa.edu.cn