

高斯随机观测矩阵的改进

赵 鑫 李东新

(河海大学计算机与信息学院 南京 211100)

摘要:在压缩感知理论中,要想精确地重构信号,观测矩阵必须满足等距性条件,大部分随机矩阵都具备此条件,并可作为观测矩阵,如高斯随机矩阵、傅里叶矩阵和贝努利随机矩阵等。其中高斯随机矩阵是研究较多的观测矩阵。然而,该类矩阵重构信号时的效果并不十分理想,恢复后的信号相对误差较大。主要针对高斯随机矩阵的上述问题,对其进行改进。改进的观测矩阵保留了高斯随机矩阵的随机独立性,很好的满足等距性条件。先通过对时域稀疏信号的压缩感知重构,来验证改进后的观测矩阵的性能,然后将其扩展到变换域信号的压缩感知重构。实验结果表明,改进后的观测矩阵比原高斯随机矩阵具有更好的性能。

关键词:压缩感知;观测矩阵;高斯随机矩阵

中图分类号: TN92 文献标识码:A 国家标准学科分类代码: 510.40

Improvement of Gauss random measurement matrix

Zhao Xin Li Dongxin

(College of Computer and Information, Hohai University, Nanjing 211100, China)

Abstract: In the compressed sensing theory, to accurately reconstruct signal, the measurement matrix must satisfy condition of restricted isometry property (RIP), most of the random matrix satisfy this condition, and can be used as the measurement matrix, such as Gauss, Fourier and Bernoulli random matrix. Among them, Gauss random matrix is a common measurement matrix. However, the effect of this kind of matrix reconstructed signal is not very satisfactory. In this paper, we mainly deal with the above problems of Gauss random matrix. The improved measurement matrix preserves the random independence of Gauss random matrix, and satisfies the condition of RIP. The performance of the improved measurement matrix is verified by the reconstruction of compressed sensing in time domain, and then it is extended to the transform domain compressed sensing reconstruction. The experimental results show that the improved measurement matrix has better performance than the original Gauss random matrix.

Keywords: compressed sensing; measurement matrix; Gaussian random matrix

1 引言

压缩感知理论采用非适应性线性投影来完成信号从高维到低维的转换,同时以这种方式保证了信号的原始结构,最后通过数值最优化问题的求解来恢复重构信号。与传统的采样原理^[1]不同,压缩感知理论非刻意性的实现了压缩和采样的同时进行,应用观测矩阵对原始信号进行投影,并从获得的压缩观测值中准确的恢复原始信号。

压缩感知理论实现的前提是信号是稀疏的或在某种变换下是稀疏的,把这两种信号定义成时域稀疏信号或变

换域稀疏信号。时域稀疏信号就是信号不需变换,本身为稀疏信号,可以直接观测到其非零的元素值和位置信息;而变换域稀疏信号则是要对信号进行某种变换来得到信号的非零系数,如傅里叶变换、小波变换和空域角度变换等,通过变换得到的非零系数来确定信号的主要信息。图1所示简要地阐释了可稀疏表示信号的压缩感知原理,以及观测矩阵的作用:进一步提高稀疏字典正交性(或减小稀疏字典原子的相关性);对原始信号进行降维,以实现压缩的预期。可以看出选择合适的观测矩阵,可以一举实现压缩和变换的双重收益。

收稿日期:2017-02

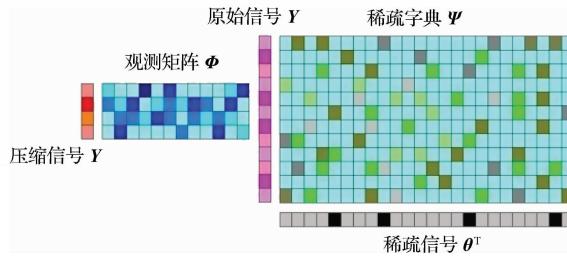


图 1 压缩感知原理

2 稀疏信号的压缩感知

2.1 时域稀疏信号的压缩感知

稀疏信号是指一个信号中绝大部分元素为 0, 只有极少数非零元素。若长度为 N 的信号 \mathbf{X} 中的非零元素只有 $K (K \ll N)$ 个, 则称信号 \mathbf{X} 为 K -稀疏信号。压缩感知理论表明, 已知 R^N 空间的稀疏信号 \mathbf{X} 和观测矩阵 $\Phi \in R^{M \times N} (M \ll N)$, 则稀疏信号在该矩阵下的线性观测值为 $\mathbf{Y} \in R^M$

$$\mathbf{Y} = \Phi \mathbf{X} \quad (1)$$

式(1)也可以看作是信号 \mathbf{X} 在观测矩阵 Φ 下的线性投影, 其中观测矩阵要满足约束等线性(restricted isometry property, RIP)^[2]。

接下来问题就集中在如何从观测集 \mathbf{Y} 中精确地或高概率地重构原信号 \mathbf{X} 。理论上要通过下面的最优化问题求解。

$$\mathbf{X} = \operatorname{argmin} \|\mathbf{X}\|_0 \text{ subject to } \mathbf{Y} = \Phi \mathbf{X} \quad (2)$$

式中: $\|\cdot\|_0$ 表示 \mathbf{X} 中的非零元素个数。但是求解式(2)是 NP-hard 问题, 数值计算极不稳定。Donoho 等指出通过求解一个更简单的 l_1 优化问题代替求解式(2), 会得到同等的解, 即:

$$\mathbf{X} = \operatorname{argmin} \|\mathbf{X}\|_1 \text{ subject to } \mathbf{Y} = \Phi \mathbf{X} \quad (3)$$

2.2 变换域稀疏信号的压缩感知

如果一个信号本身并不是稀疏信号, 则需要对其进行稀疏变换, 即使得信号在某个变换基下是稀疏的。当长度为 N 的一维时间信号 \mathbf{X} 本身不是稀疏信号, 而 \mathbf{X} 可以表示成一组标准正交基的线性组合。

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^N \theta_i \psi_i = \Psi \theta \quad (4)$$

其中 $\Psi = [\psi_1 | \psi_2 | \dots | \psi_N]$, $\theta_i = \langle \mathbf{X}, \psi_i \rangle = \psi_i^T \mathbf{X}$ 。如果 \mathbf{X} 变换后只有很少的大系数, 则称 \mathbf{X} 为可压缩信号; 如果变换后 \mathbf{X} 中非零系数只有 K 个, 则定义 θ 为信号 \mathbf{X} 的 K -稀疏表示。

当用观测矩阵 $\Phi \in R^{M \times N} (M \ll N)$ 对长度为 N 信号 \mathbf{X} 进行投影观测时, 得到的 M 个观测向量为 $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_M)$,

$$\mathbf{Y} = \Phi \mathbf{X} = \Phi \Psi \theta = A_{cs} \theta \quad (5)$$

其中 A_{cs} 为 $M \times N$ 矩阵, 称为压缩感知信息算子。

此时问题就转化为求解欠定式(5), 如果 A_{cs} 满足

RIP, 则重构系数向量为:

$$\hat{\theta} = \min \|\theta\|_1 \text{ subject to } \mathbf{Y} = A_{cs} \theta \quad (6)$$

重构原始信号为:

$$\hat{\mathbf{X}} = \Psi \hat{\theta} \quad (7)$$

效果较好的获得稀疏解的方法包括贪婪算法^[3], 即最小化 l_0 拟范数与最小化 l_1 范数的凸最优化方法, 还有基于 l_p 范数的非凸方法($0 < p < 1$)。正交匹配追踪算法^[4]是种性能较好的重构算法, 它以极大概率重构信号, 精确度高, 而且计算速度也比 l_1 范数法更快。这种算法沿用了匹配追踪算法^[5]中的原子选择匹配准则, 但通过对已选择的原子集合递归地进行正交化, 消除了匹配追踪算法中迭代的次优性, 从而减少了迭代次数。因此选择正交匹配追踪算法作为恢复算法。

2.3 两种稀疏信号的观测限制条件

对于时域 K -稀疏信号 $\mathbf{X} \in R^N$, 设观测矩阵 Φ 由 M 个观测向量组成。为了可以从远小于信号长度的 M 个观测向量中精确地重构信号, Candes 和 Tao 给出了精确重构信号时观测矩阵 Φ 必须满足一定的约束条件, 这就是约束等距性。即, 对于任意 $\mathbf{c} \in R^{1 \times T}$ 和常数 $\delta_k \in (0, 1)$, 如果

$$(1 - \delta_K) \|\mathbf{c}\|_2^2 \leq \|\Phi_T \mathbf{c}\|_2^2 \leq (1 + \delta_K) \|\mathbf{c}\|_2^2 \quad (8)$$

成立, 则称 Φ 满足约束等距性。其中 $T \subset (1, \dots, N)$, $|T| \leq K$, Φ_T 为 Φ 中的子矩阵, 它由索引 T 所指示的相关列构成, 大小为 $K \times |T|$ 。

对变换域稀疏信号, 满足约束等距性的条件则变为

$$(1 - \delta_K) \|\mathbf{c}\|_2^2 \leq \|A_T \mathbf{c}\|_2^2 \leq (1 + \delta_K) \|\mathbf{c}\|_2^2 \quad (9)$$

成立。其中, A_T 为 A_{cs} 中的子矩阵, 由索引 T 所指示的相关列构成, 大小为 $K \times |T|$ 。

约束等距性条件的描述抽象且不易直观的实现, 后来, Baraniuk 给出并证明了约束等距性的等价表达^[6]: 观测矩阵 Φ 和稀疏变换基 Ψ (有称稀疏字典)不相关, 也就是要求 Φ 的行 Φ_i 不能由 Ψ 的列 ψ_i 稀疏表示, 同时 Ψ 的列也不能由 Φ 的行稀疏表示。这等价条件的提出, 给解决问题带来了很大方便, 由于稀疏变换基 Ψ 是固定不变的, 只需要通过研究设计观测矩阵 Φ 来解决本来很复杂的问题。

3 改进的高斯随机观测矩阵

高斯随机观测矩阵是得到证明的最常见的满足约束等距性条件的观测矩阵之一, 该矩阵元素在 $(0, 1)$ 间服从随机独立的正态分布, 该性质使它几乎与任何稀疏信号都不相关, 这也是选择它作为观测矩阵的主要原因。但是, 高斯随机观测矩阵的非结构化本质使其在观测过程中的计算复杂度增加, 这也给观测准确度及其恢复精度带来很大的影响^[7]。而正交矩阵作为一种结构化很强的矩阵, 可以对其他矩阵进行结构化的正交变换。设有矩阵 P , 如果 P 满足 $P^T P = E$, 则称 P 为正交矩阵。对矩阵做正交变换

就是将矩阵乘以一个与其同阶的正交矩阵。由于正交变换不会改变图形的几何形状和向量的长度,即不会改变正交变换后的随机矩阵的随机性^[8]。高斯随机矩阵在正交变换后,变得更加结构化,实际是一组关于实轴对称的向量组,但依旧是个随机矩阵^[9]。

新的矩阵为高斯随机矩阵和正交矩阵相乘得到的矩阵,满足约束等距性条件。设 Φ 为 $M \times N$ 的高斯随机矩阵, F 为 $N \times N$ 的正交矩阵, F_1 为 $M \times M$ 的正交矩阵, F_2 为 $N \times N$ 的正交矩阵,则新的观测矩阵为:

$$\Phi_1 = \Phi F \quad (10)$$

$$\Phi_2 = F_2 \Phi F_1 \quad (11)$$

新的观测矩阵由于与正交矩阵的相乘变换,使得本来的高斯随机观测矩阵的结构化程度变高,在记录信息值得同时也保存了信息点的位置,这提高了高斯随机矩阵作为观测矩阵的性能。特殊地,当 X 本身为稀疏信号时,可以用观测矩阵 Φ 直接进行观测, Φ 满足约束等距性条件,可以由它所得到的观测值准确的恢复信号。

定理^[10]:对于正交变换 F ,若观测矩阵 Φ 满足参数为 δ_k 的 RIP,则改进型的高斯随机观测矩阵 Φ_1 也满足 RIP。

证明:因为 $\Phi_1 = \Phi F$,所以有:

$$\|\Phi_1 S\|_2^2 = \|\Phi F S\|_2^2 = \|\Phi X\|_2^2 \quad (12)$$

又有:

$$\|S\|_2^2 = \|F^{-1} X\|_2^2 = \|X\|_2^2 \quad (13)$$

其中 Φ 满足 δ_k 的 RIP,所以有:

$$(1 - \delta_k) \|X\|_2^2 \leq \|\Phi X\|_2^2 \leq (1 + \delta_k) \|X\|_2^2 \quad (14)$$

由式(8)和式(9)得:

$$(1 - \delta_k) \|S\|_2^2 \leq \|\Phi_1 S\|_2^2 \leq (1 + \delta_k) \|S\|_2^2 \quad (15)$$

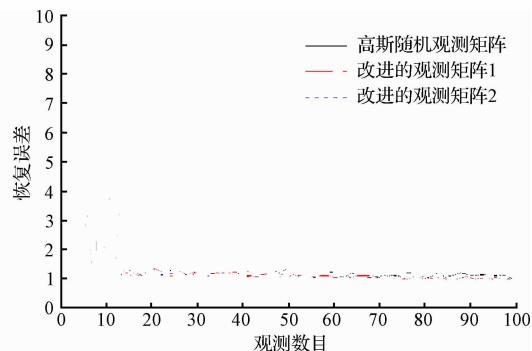
所以 Φ_1 满足 δ_k 的 RIP。

推论:对于正交变换 F ,若观测矩阵 Φ 满足参数为 δ_k 的 RIP,则改进型的高斯随机观测矩阵 Φ_2 也满足 RIP。

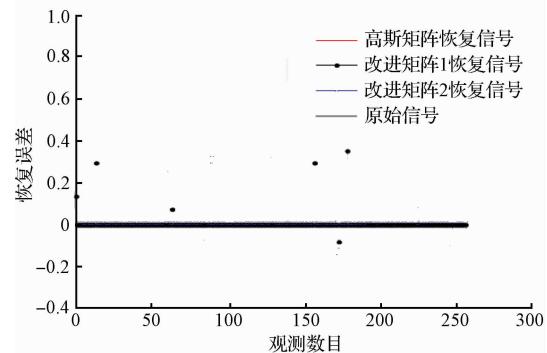
4 仿真实验结果

选用长度为 256,稀疏度为 8 的随机离散稀疏信号和傅里叶变换下稀疏度为 8 的确知模拟信号分别进行 Matlab 仿真实验。实验中采用的重构算法统一为正交匹配追踪算法。如图 2(a)所示,针对时域稀疏信号的压缩感知,比较 $\|X - \hat{X}\|_2 / \|X\|_2$ 形式的改进的高斯随机观测矩阵与传统高斯随机观测矩阵的恢复误差。如图 2(b)~(e)所示,给出了两种观测矩阵在不同观测数目下的信号恢复情况。表 1 所示则用数字说明了两种观测矩阵的恢复误差。同样,如图 3 所示针对变换域稀疏信号也给出了改进的高斯随机观测矩阵与传统高斯随机观测矩阵的恢复误差情况和两种观测矩阵在不同观测数目下的信号恢复情况,表 2 则是对应的数字说明两种观测矩阵的恢复误差。实验通过重复运行 500 次来计算两种观测矩阵下的

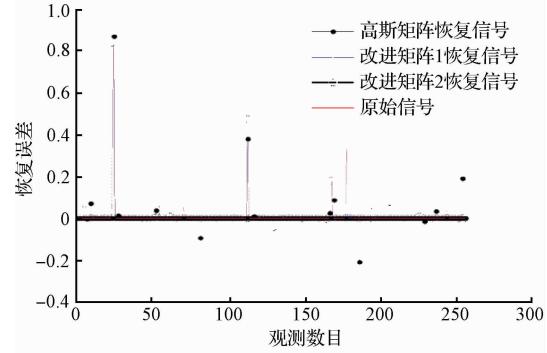
平均恢复误差。大量的实验结果表明,改进后的观测矩阵的性能明显优于传统高斯随机观测矩阵。



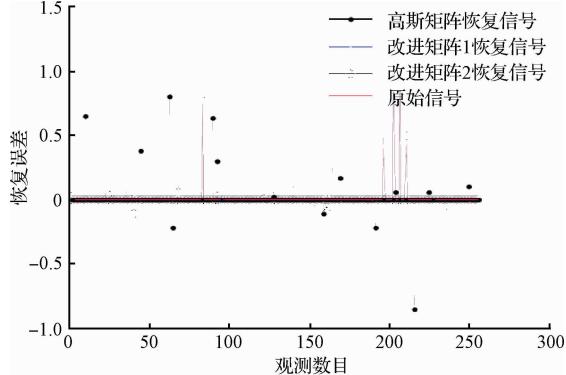
(a) 不同观测矩阵下的恢复误差随观测数目的变化



(b) 观测数目 $M=15$ 时的信号恢复结果



(c) 观测数目 $M=20$ 时的信号恢复结果



(d) 观测数目 $M=30$ 时的信号恢复结果

表 1 统计实验结果

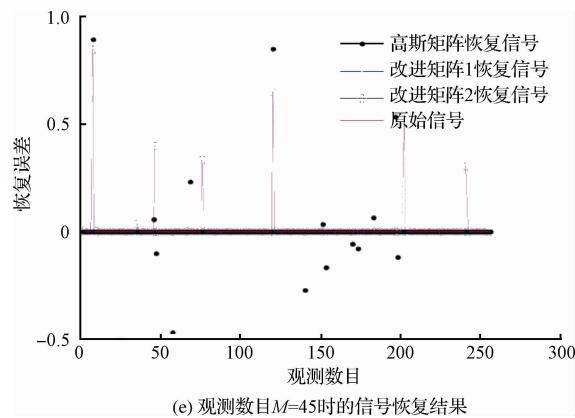


图2 时域稀疏信号在不同观测矩阵下的信号恢复

观测数目	观测矩阵		
	Φ	Φ_1	Φ_2
$M=15$	1.160 2	1.050 0	1.055 5
$M=30$	0.641 0	0.334 4	0.332 6
$M=45$	2.110 8e-15	2.002 4e-15	2.003 7e-15
$M=60$	1.060 0e-16	1.054 7e-16	1.054 0e-16

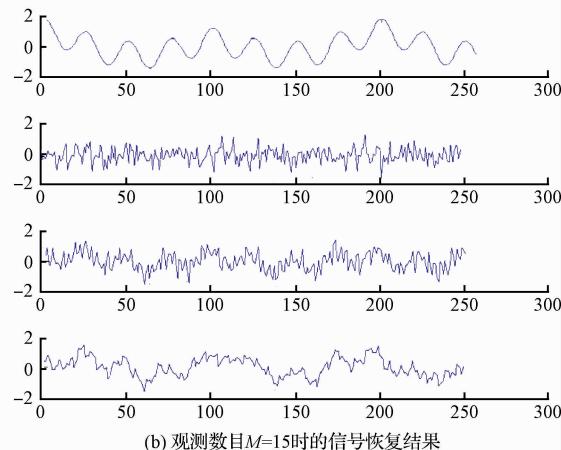
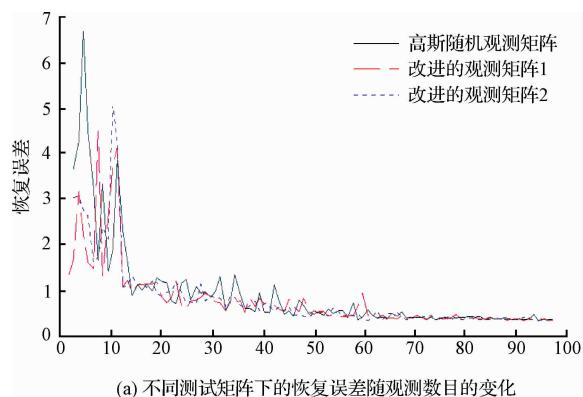
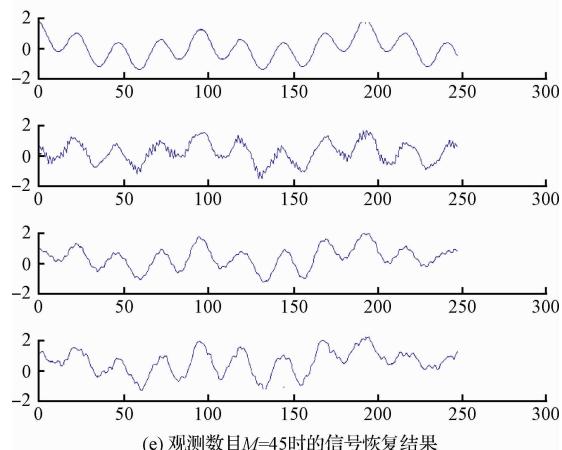
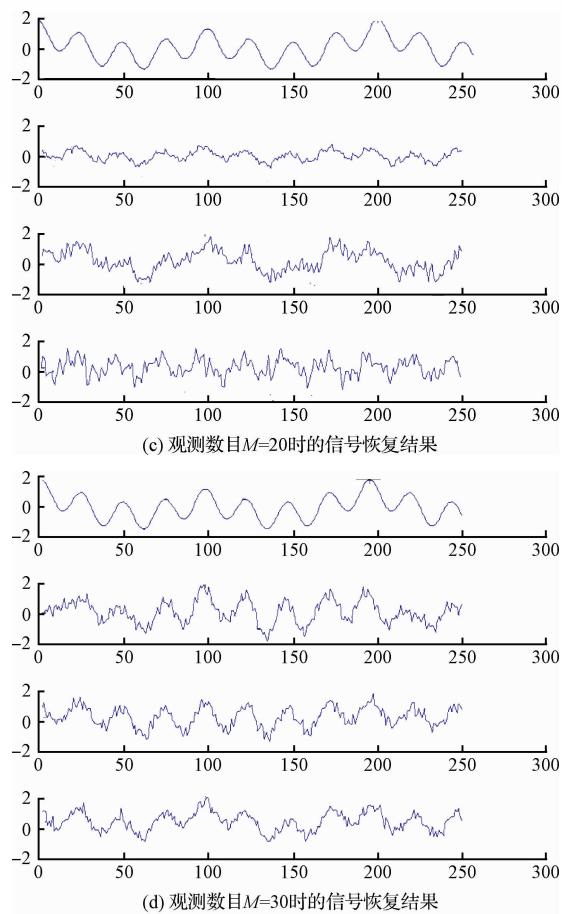


表2 统计实验结果



(e) 观测数目 $M=45$ 时的信号恢复结果

图3 变换域稀疏信号在不同观测矩阵下的信号恢复

观测数目	观测矩阵		
	Φ	Φ_1	Φ_2
$M=15$	1.086 3	1.050 3	1.052 3
$M=30$	0.771 0	0.588 0	0.720 7
$M=45$	0.436 4	0.371 5	0.425 4
$M=60$	0.382 1	0.270 5	0.306 0

5 结 论

提出一种基于高斯随机矩阵改进的新的观测矩阵,新的观测矩阵为高斯随机矩阵和正交矩阵相乘得到的矩阵,该矩阵改善了高斯随机矩阵的性能,而且很好的满足RIP。大量的仿真实验结果表明,无论是对简单的时域离散的随机稀疏信号还是一般的在变换域下稀疏的确知信号,在采用同样恢复算法的条件下,改进后的高斯随机观测矩阵下的信号恢复误差与高斯随机矩阵相比都明显减小。改进后的高斯随机观测矩阵有着比传统高斯随机观测矩阵更好的性能,这丰富了投影测量中观测矩阵的选择,也为压缩感知的发展提供了更可选的方法。

参 考 文 献

- [1] 田沛沛,刘昱,张淑芳.一种基于LDPC矩阵的压缩感知测量矩阵的构造方法[J].电子测量技术,2014,37(3):43-46.
- [2] DONOHO D. Compressed sensing[J]. IEEE Trans. on Information Theory, 2006, 52(4):1289-1306.
- [3] 王学伟,崔广伟,王琳,贾晓璐,聂伟.基于平衡Gold序列的压缩感知测量矩阵的构造[J].仪器仪表学报,2014,3(1):97-102.
- [4] 孙斌,马春晖,金心宇,等.传感器网络中基于压缩感知的压缩域目标跟踪算法研究与应用[J].电子测量与仪器学报,2016,30(11):1617-1625.
- [5] 王康,叶伟,劳国超,等.一种基于压缩感知的宽带SAR信号侦察方法[J].国外电子测量技术,2014,

(上接第 20 页)

- [2] 庞晶,张勇虎,占建伟,等.北斗 RDSS 用户机测试系统关键技术研究[J].宇航计测技术,2016,36(4):95-100.
- [3] 王聚亮,秦顺友.有源相控阵天线 EIRP 测量及误差分析[J].现代电子技术,2014,37(17):72-73.
- [4] 王海,秦顺友,陈辉.用频谱仪测量卫星信标 EIRP 及误差分析[J].河北省科学院学报,2016,33(1):22-26.
- [5] 张桂华,陈锡春.北斗用户设备测试系统的设计与实现[J].电子测量与仪器学报,2009,23(1):16-21.
- [6] 俞建,赵杰.远场暗室条件下圆极化天线增益不同测试方法分析研究[J].国外电子测量技术,2014,33(9):34-36
- [7] 宋云.天线测试系统校准方法的研究[J].雷达与对抗,2013,33(4):63-66.
- [8] 尹彬,王帅雷,陈振兴.射频信号极化模拟技术研究与实现[J].航天电子对抗,2016,32(3):53-56.
- [9] 程银宝,陈晓怀,王汉斌.基于精度理论的测量不确定度评定与分析[J].电子测量与仪器学报,2016,30(8):

33(4):40-43.

- [6] BARANIUK R. A simple proof of the restricted isometry property for random matrices[J]. Constructive Approximation, 2008, 28(3):253-263.
- [7] CANDES E, ROMBERG J, TAO T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52 (2): 489-509.
- [8] AHARON M, ELAD M, BRUCKSTEIN A M. The K-SVD: an algorithm for designing of overcomplete dictionaries for sparse representations [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15 (11): 4311-4322.
- [9] WAKIN M B, LASKA J N, DUARTE M F, et al. An architecture for compressive imaging [C]. International Conference on Image Processing, 2006, 1273-1276.
- [10] 王彪.压缩传感中的观测矩阵研究[D].天津:天津理工大学,2011.

作 者 简 介

赵鑫,1983 年出生,硕士研究生,研究方向为信号处理、压缩感知。
E-mail:493130599@qq.com

李东新,1964 年出生,副教授,研究方向为应用电子技术。

1175-1182.

- [10] JJF1059. 1-2012, 测量不确定度评定与表示[S].北京:国家质量监督检验检疫总局,2012.
- [11] 陈振林,崔欣辰.微波同轴小功率计校准因子测量不确定度评定[J].计测技术,2015(S1):229-230.
- [12] 王瑞宝.基于蒙特卡洛法的微波功率测量不确定度评定[J].国外电子测量技术,2015,34(7):28-31.
- [13] 黄凯冬.标准增益喇叭天线的准确定标测量[J].国外电子测量技术,2010,29(9):26-29.
- [14] 王敬坤,王敏.矢量网络分析仪测量不确定度分析仪[C].全国微波毫米波会议,2015.
- [15] JJF(军工)3-2012, 国防军工计量标准器具技术报告编写要求[S].北京:国家国防科技工业局,2012.

作 者 简 介

梁桂海,1982 年出生,工学学士,工程师,主要研究方向为时间频率计量、无线电计量和卫星导航产品检测等。
E-mail:13308215107@189.cn