

一种基于三次样条插值法的时基误差校正方法

赵洋¹ 高立² 何玲¹ 何丕雁¹

(1. 电子科技大学 成都 611731; 2. 中国电子技术标准化研究院 北京 100007)

摘要:在基于多通道的高速并行采样系统中,误差估计和误差校正(等效于信号重建)是最重要的环节。提出了采用采样时间、采样波形构成的三次样条插值函数来重建多通道非均匀采样信号,利用了多通道的时基误差的周期性计算函数系数,简化了运算、降低了计算复杂度,并且该方法适用于任意通道数的采样。仿真结果表明,该方法可以对多通道高速并行采样信号进行有效地重建,校正效果良好。

关键词:多通道高速采样;时基误差;非周期均匀性;三次样条插值

中图分类号: TP2 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 510.40

Method of time base error correction based on cubic spline interpolation

Zhao Yang¹ Gao Li² He Ling¹ He Piyan¹

(1. University of Electronic Science and Technology, Chengdu 2611731, China;

2. China Electronics Standardization Institute, Beijing 100007, China)

Abstract: In multi-channel high-speed parallel sampling systems, error estimation and error correction (equivalent to signal reconstruction) are the most important aspects. The paper proposes a cubic spline interpolation method with sampling time and sampling waveform to reconstruct the multi-channel non-uniform sampling signal. In the coefficient of the function, the periodicity of the multi-channel time-base error is used to simplify the operation and reduce the Computational complexity, and is suitable for sampling of any number of channels. The simulation results show that the proposed method can reconstruct the multi-channel high-speed parallel sampling signal effectively and the correction effect is good.

Keywords: multi-channel high-speed sampling; time base error; period nonuniformity; cubic spline interpolation

0 引言

随着现代电子科技的迅猛发展,在信号高速采样方面的需求越来越多。例如在宽带测试系统、雷达、遥测遥感、图像处理、宽带模拟 IC 等方面都需要用到高速数据采集系统^[1-2]。但根据奈奎斯特原理,要想完全无损地重建信号,采样频率至少是信号频率的两倍以上。而如今,单片的 ADC 并没有达到如此高的采样率^[3],文献[4]提出的时间交织结构有效地解决了这个问题,多通道并行采样系统就是采用多片低速 ADC 形成的时间交织结构,并在后端进行组合,从而实现了信号的高速采样。

实际的时间交替模数转换器(time-interleaved analog-to-digital converter, TIADC)系统由于各个通道间的失配误差(偏置误差、增益误差、时基误差)的存在,使得形成非均匀采样波形,并引入了杂乱频谱^[4]。要想完全重建信

号,首先要对信号之间的失配误差进行估计,然后对这些误差进行有效地校准^[5]。其中,偏置误差和增益误差的估计校准都比较简单,一般来说对增益误差采用频谱分析法进行估计,并用乘法器进行校正。对偏置误差采用整周期采样法进行估计,并用加法器进行校正^[6-7]。而时基误差的存在,会造成系统采样幅值和采样频谱的失真,是对系统影响最大最重要的误差。文献[8-9]对时基误差的估计采用了三参数正弦拟合法,该方法简单易行,但是必须先知道信号的频率,局限性大。对于时基误差的校正采用了基于 Farrow 结构的分数延迟滤波器,该方法的优势在系统通道的时基误差发生变化的时候,无需重新更换滤波器,调整滤波器系数,但是该方法硬件成本高,结构较复杂^[10]。文献[11]对时基误差采用了基于 Steffensen-Newton 算法的迭代盲估计,该方法无需事先知道信号的频率,原理简单,但运算复杂度太高。对时基误差的校正采用了

基于频域的多通道的离散傅里叶变换,避免了时域中复杂的插值运算,但是校正精度较差。

考虑到上述方法的不足之处,本文在对于时基误差的校正方面(即信号的重建)提出了一种新的运算方法,即:三次样条插值法。利用采样时间点和采样波形序列组成的三次样条插值函数实现对于高速采样信号的重建。

1 TIADC 并行采样

1.1 多通道高速并行采样模型

本文采取的多通道高速并行采样系统使用了 M 片 ADC,由同一时钟控制驱动,每片 ADC 为一个单独的通道依次进行采样,采样率为 f_s/M ,并在后端进行重组,从而实现了 f_s 的高速采样。理想的 TIADC 系统形成的是均匀采样波形。实际中,各片 ADC 实际中不可能达到完全一致,出现了通道误差,形成了非均匀采样波形。其中,确定性的时间误差(时基误差)使得采样发生了相位偏移,频谱变化。由于每个采样点和它之后的第 M 个采样点的时基误差相等,因此在只考虑时基误差的情况下,形成的波形为周期非均匀采样。具体如图 1 所示,相邻采样点之间的时间间隔是非均匀的,但是每个采样点和它之后的 M 个采样点之间的时间间隔又是均匀的。

$$\begin{aligned} t_n - t_{n-1} &\neq t_{n+1} - t_n \\ t_{n+M} &= t_n + MT \end{aligned} \quad (1)$$

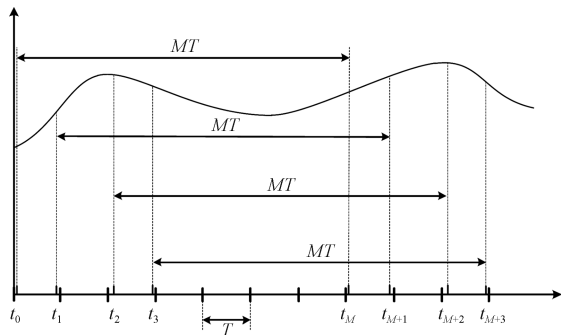


图 1 周期非均匀采样波形

1.2 三次样条插值法

信号重构,就是已知实际的一些采样点,然后利用已有的采样点进行一系列的运算,从而知道信号在理想采样点函数值的过程^[12]。信号重构传统的方法有内插、模拟校准、数字校准等方法,模拟校准和数字校准硬件实现成本高,操作复杂^[13];而内插重建方法适用范围广,并且本文采取的三次样条插值法原理简单,计算精确度高。信号在经过多通道高速并行采样后,形成的 n 个采样时间序列与采样幅值满足三次样条插值法的条件,构成了三次样条插值函数,具体如下^[14]:

1) 采样信号 $x(t) \in C^2[a, b]$; 为了后续计算方便,令 $x(t_i) = y_i$

2) 采样信号 $x(t)$ 在每个采样通道时间序列中 (t_i, t_{i+1})

可以近似表示为一个三次多项式:

$$x(t) = c_{i1}(t - t_i)^3 + c_{i2}(t - t_i)^2 + c_{i3}(t - t_i) + c_{i4}$$

3) $x(t)$ 在整个时间序列 $[t_0, t_n]$ 内一阶和二阶导数是连续的。

由上述可知,为了实现信号的重建,求出 $x(t)$, 在每个采样通道时间序列中要确定 4 个待定系数,共有 n 个小区间,因此共需要确定出 $4n$ 个参数。

由上述第 3 个条件可知, $x(t_i)$ 在 $[t_0, t_n]$ 上二阶导数连续,因此在节点 t_j 处应满足连续性条件:

$$x(t_j + 0) = x(t_j - 0); \quad x'(t_j + 0) = x'(t_j - 0);$$

$$x''(t_j + 0) = x''(t_j - 0); \quad j \in (1, 2, \dots, n-1)$$

可知,共有 $3(n-1)$ 个条件。

由第 1 个条件可知, $x(t_i) = y_i, i = (0, 1, 2, \dots, n)$ 有 $n+1$ 个条件。

这样,共有 $n+1+3(n-1) = 4n-2$ 个条件,下面对 $x(t_i) = y_i$ 多项式进行求解。

若假设 $x'(t_i) = k_j$, 则由分段三次埃尔米特插值公式

可知: $x(t) = \sum_{j=0}^n [y_j \alpha_j(t) + k_j \beta_j(t)]$, 其中 $\alpha_j(t), \beta_j(t)$ 为插值基函数。

现在通过 $x''(t_j + 0) = x''(t_j - 0)$ 求出 k_j 。

假设 $x(t)$ 在 $[t_j, t_{j+1}]$ 上的表达式为:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{(t - t_{j+1})^2 [h_j + 2(t - t_j)]}{h_j^3} y_j + \\ &\frac{(t - t_j)^2 [h_j + 2(t_{j+1} - t)]}{h_j^3} y_{j+1} + \frac{(t - t_{j+1})^2 [t - t_j]}{h_j^2} k_j \end{aligned} \quad (2)$$

式中:定义 $h_j = t_{j+1} - t_j$ 。

那么, $x(t)$ 的二阶导数为:

$$\begin{aligned} x''(t) &= \frac{6t - 2t_j - 4t_{j+1}}{h_j^2} k_j + \frac{6t - 4t_j - 2t_{j+1}}{h_j^2} k_{j+1} + \\ &\frac{6(t_j + t_{j+1} - 2t)}{h_j^3} (y_{j+1} - y_j) \end{aligned}$$

因此,可得知:

$$x''(t_j + 0) = -\frac{4}{h_j} k_j - \frac{2}{h_j} k_{j+1} + \frac{6}{h_j^2} (y_{j+1} - y_j)$$

同理, $x''(t)$ 在 $[t_{j-1}, t_j]$ 上的表达式为:

$$\begin{aligned} x''(t) &= \frac{6t - 2t_{j-1} - 4t_j}{h_{j-1}^2} k_{j-1} + \frac{6t - 4t_{j-1} - 2t_j}{h_{j-1}^2} k_j + \\ &\frac{6(t_{j-1} + t_j - 2t)}{h_{j-1}^3} (y_j - y_{j-1}) \end{aligned} \quad (3)$$

因此,也得知:

$$x''(t_j - 0) = \frac{4}{h_{j-1}} k_{j-1} + \frac{2}{h_{j-1}} k_j - \frac{6}{h_{j-1}^2} (y_j - y_{j-1})$$

已知 $x''(t_j + 0) = x''(t_j - 0) (j = 1, 2, 3, \dots, n-1)$

因此可知:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_{j-1}} k_{j-1} + 2 \left(\frac{1}{h_{j-1}} + \frac{1}{h_j} \right) k_j + \frac{1}{h_j} k_{j+1} = \\ 3 \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_j^2} + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_{j-1}^2} \right) \end{aligned}$$

因为 $\frac{y_{j+1}-y_j}{h_j} = x'[t_j, t_{j+1}]$

令 $\lambda_j = \frac{h_j}{h_{j-1}+h_j}, \mu_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1}+h_j}$

因此方程可简化为: $\lambda_j k_{j-1} + 2k_j + \mu_j k_{j+1} = g_j$

式中: $g_j = 3(\lambda_j x'[t_{j-1}, t_j] + \mu_j x'[t_j, t_{j+1}])$

因为系统采样后的信号为周期非均匀采样, $t_{n+M} = t_n + MT$ 。所以, $x'(t_n) = x'(t_{n+M})$ 。也就是时间间隔为 MT 的信号一阶导数是相等的。利用这个特性,有:

$$\frac{1}{h_0} k_1 + \frac{1}{h_{n-1}} k_{n-1} + 2\left(\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_{n-1}}\right) k_n = \frac{3}{h_0} x'[t_0, t_1] + \frac{3}{h_{n-1}} x'[t_{n-1}, t_n] \quad (4)$$

为了方便计算,简化后的方程可以写成矩阵的形式

$$\begin{pmatrix} 2 & \mu_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ \mu_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{pmatrix}$$

可以看出来,系数矩阵对角线元素为 2,非对角线元素 $\lambda_j + \mu_j = 1$,所以可知矩阵有唯一解。

可以很方便得知,

$$x(t) = k_{j-1} \varphi_{1j}(t) - m_j \varphi_{2j}(t) + x_{j-1} \mu_{1j}(t) + x_j \mu_{2j}(t)$$

各个系数如下:

$$\varphi_{1j}(t) = \frac{1}{h_j^2} (t_j - t)^2 (t - t_{j-1})$$

$$\varphi_{2j}(t) = \frac{1}{h_j^2} (t - t_{j-1})^2 (t_j - t)$$

$$\mu_{1j}(t) = \frac{1}{h_j^3} (t_j - t)^2 [2(t - t_{j-1}) + h_j]$$

$$\mu_{2j}(t) = \frac{1}{h_j^3} (t - t_{j-1})^2 [2(t_j - t) + h_j]$$

得出三次样条插值的方程后,也就是得到了每个通道的采样波形函数,再将理想采样点的时间代入方程中,对信号进行均匀重采样,即可完成信号的重构。

2 仿真实验与数据分析

本文采取四通道高速采样系统,输入测试信号采用正弦信号。为了更贴近实际情况,加入了幅值为 0.005 的白噪声。仿真条件设置为:输入频率为 $f_0 = 125$ Hz 的单频正弦信号 $x(t) = \cos(250\pi t)$,系统采样点数为 1 024,每个通道的采样率为 400 MHz。假设增益误差和偏置误差不存在,取时基误差为 $[0.2, -0.1, 0.1, 0.2]$,仿真结果如图 2 所示。

将信号的输入频率改为 $f_0 = 45$ Hz,即输入信号为正弦信号 $x(t) = \cos(90\pi t)$,其他条件不变,仿真结果如图 3 所示。

将噪声改为随机干扰,其他仿真条件保持不变,仿真结果如图 4 所示。

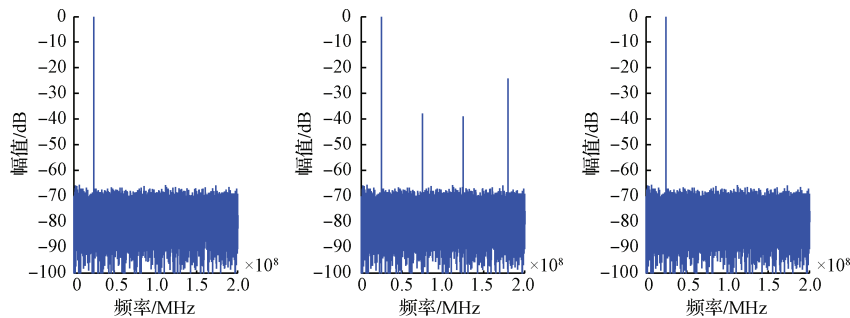


图 2 $f_0 = 125$ Hz 均匀采样、周期非均匀采样、重构后信号频谱(幅值为 0.005 白噪声)

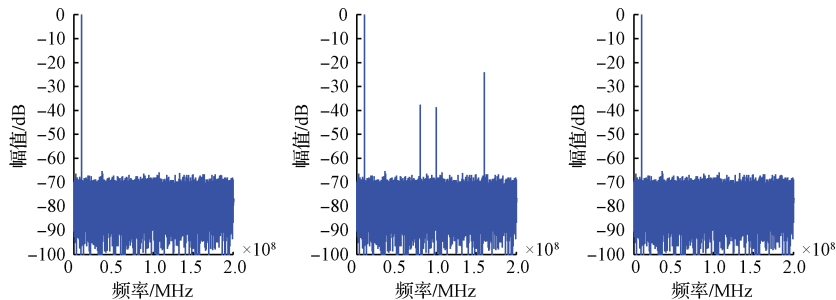


图 3 $f_0 = 45$ Hz 均匀采样、周期非均匀采样、重构后信号频谱(幅值为 0.005 白噪声)

可以由以上波形看出来,三次样条插值法的使用,和噪声类型,信号输入频率大小无关,信号基本上都得以重

建,由于时基误差造成的杂乱频谱得以消除。

信噪比和无杂散动态范围是评价多通道并行采样系

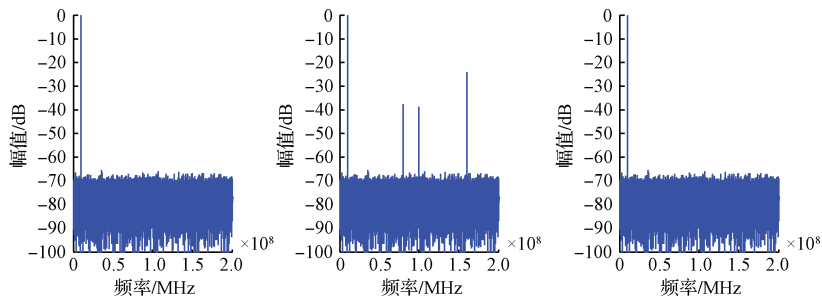


图4 $f_0 = 45$ Hz 均匀采样、周期非均匀采样、重构后信号频谱(随机干扰噪声)

统的有效指标。

$$\text{其中, } \text{SNR} = 10\lg\left(\frac{P_s}{P_N}\right), \text{SFDR} = 10\lg\left(\frac{P_s}{P_{\text{Max}}}\right)$$

现将仿真条件设置同上,计算出使用三次样条插值法补偿前后的信噪比,如图5所示。

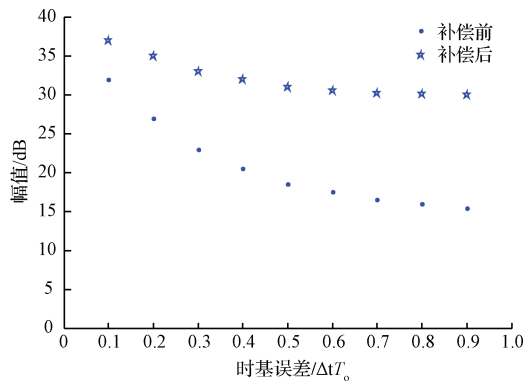


图5 采用三次样条插值法重建前后系统信噪比

图5表示随着时基误差的增大,信号的信噪比随之降低。而在使用三次样条插值法重建后,在总体趋势不变的情况下,信噪比还是得到了明显的提升。

现在使用无杂散动态范围比较本文重建方法和文献^[5]基于Farrow结构的分数延迟滤波器重建方法。仿真条件仍同上,后者重建方法的滤波器设置为四阶,计算结果图6所示。

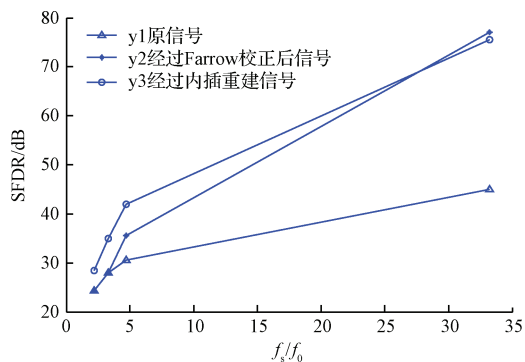


图6 滤波器重建和三次样条插值重建对于SFDR影响对比

图6表示随着采样频率的增大,两者对于无杂散动态范围的数值都有所提升,而三次样条插值法对于无杂散动

态范围的提升较大。

3 结论

本文提出使用三次样条插值法进行信号的重建,该方法简单易行,直观方便,在偏置误差和增益误差已经校正的情况下,利用只有时基误差存在情况下形成的非均匀信号的周期性,简化了运算,对比文献^[4]基于Farrow结构的分数延迟滤波器,成本低,精度高,减小了校正的复杂度,并且无需搭建滤波器。本次仿真实验中的频谱波形,以及评价多通道高速并行采样系统的指标(无杂散动态范围、信噪比)证明了算法的有效性和可行性。

参考文献

- [1] PEI S C, SHYU J, CHAN C H, et al. An improved method for the design of variable fractional-delay IIR digital filters[C]. IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 2012:394-397.
- [2] PILLAI A K, JOHANSSON, H. Efficient signal reconstruction scheme for M-channel time-interleaved ADCs[J]. Analog Integrated Circuits and Signal Processing, 2013, 77(2):113-122.
- [3] 佚名. Teledyne LeCroy 发布 10 bit HDO9000 高精度示波器[J]. 国外电子测量技术, 2016, 35(9):15-16.
- [4] MATSUNO J, YAMAJI T, FURUTA M, et al. All-digital background calibration for time-interleaved ADC using pseudo aliasing signal[J]. IEEE Transactions on Circuits & Systems I Regular Papers, 2013, 60(5):1113-1121.
- [5] CAMARERO D, KALAI A K B, NAVINER J F, et al. Mixed-signal clock-skew calibration technique for time-interleaved ADCs [J]. IEEE Transactions on Circuits & Systems I Regular Papers, 2009, 55(11): 3676-3687.
- [6] EL-CHAMMAS M, MURMANN B. A 12-GS/s 81-mW 5-bit time-interleaved flash ADC with background timing skew calibration[J]. IEEE Journal of Solid-State Circuits, 2011, 46(4):157-158.

(下转第37页)