

# 基于三步数值积分的弹道外推方法

周 进

(河海大学计算机与信息学院 南京 210000)

**摘 要:**利用已经形成的弹道轨迹,采用三步数值积分的方法外推弹丸的起始点。首先采用两次积分确定弹道外推的积分参数,确保弹道外推的精度,然后利用积分参数进行第3次数值积分获得弹丸的起始位置。接着利用积分时间间隔从弹道轨迹滤波的结束点向炮口进行第3次积分,完成弹道外推。最后将积分结果转换到雷达切平面坐标系中。这样能够有效保证弹道外推的精度,准确估计出弹丸的发射位置,适用于炮位雷达的对于迫击炮和榴弹炮的弹道外推过程。

**关键词:**弹道轨迹; 三步数值积分; 炮位雷达

**中图分类号:** TN953<sup>†</sup>3    **文献标识码:** A    **国家标准学科分类代码:** 510.4020

## Trajectory prediction method based on three-step numerical integration

Zhou Jin

(College of Computer and Information, Hohai University, Nanjing 210000, China)

**Abstract:** This use has been the formation of trajectory, using three steps the starting point for numerical integral method of extrapolation of the projectile. First two integrals to determine trajectory prediction parameters, ensure accuracy trajectory extrapolation and use of integral parameters of numerical integration for the third time to obtain the starting position of the projectile. The integral interval from the end point of the trajectory filtering is the third integral to the muzzle. The integral result of the conversion to a radar plane coordinates. Can effectively ensure the accuracy of trajectory and accurately obtain the projectile firing position, applies to weapon location radar trajectory prediction of mortars and howitzers muzzle.

**Keywords:** ballistic trajectories; three-step numerical integration; artillery locating radar

### 0 引 言

关于弹道外推的方法,旨在为雷达经过弹道修正形成弹丸的飞行轨迹后反推出弹丸的发射位置。本文方法能有效保证弹道外推的精度<sup>[1]</sup>,准确估计出弹丸的发射位置,适应炮位雷达对于迫击炮和榴弹炮的弹道外推过程<sup>[2]</sup>。同时,本文在弹道外推过程中为弥补现有技术不足采用了三步数值积分的方法外推弹丸的起始点,求得炮位的位置<sup>[3]</sup>。

### 1 方 法

1) 将低基面在炮口坐标系的高度  $S_1$  和高基面在炮口坐标系的高度  $S_2$  转换到炮口坐标系内<sup>[4]</sup>。

2) 进行第一次积分,若弹道滤波结束点的高度  $Y_e > S_2$  即弹道滤波结束点的高度大于高基面的高度  $S_2$  向后积分直到  $Y < S_2$ ,记录下积分时间  $T_a$  和积分储元值;若  $Y_e < S_2$  即弹道滤波结束点的高度小于高基面的高度  $S_2$ ,向前

积分直到  $Y > S_2$  记录下积分时间  $T_b$  和积分储元值<sup>[5]</sup>。

3) 进行第二次积分,从第一次积分的结束点向炮口积分,直至  $Y < S_1$  或者  $T_{b \geq} 4$ ,当这两个条件满足其中之一后,记下积分结果以及积分时间  $T_b$ ,退出积分程序<sup>[6]</sup>。

4) 进行弹道外推,从弹道滤波的结束点  $X_e = [x_e \ y_e \ z_e \ v_{xe} \ v_{ye} \ v_{ze}]$ ,取积分时间间隔为  $\Delta t = |T_a - T_b| / 45$ ,向炮口积分 45 步,记录下积分结果,并将积分结果转换到雷达切平面坐标系中,完成弹道外推过程,最后一点即为弹丸的起始位置<sup>[7]</sup>。

### 2 步 骤

根据要求所述的基于三步数值的弹道外推方法,其特征在于以下步骤。

1) 初始条件计算,利用测量数据进行滤波形成弹道轨迹后,假设弹道轨迹的最后一点在炮口坐标系中的状态始量为:

$$X_e = [x_e \ y_e \ z_e \ v_{xe} \ v_{ye} \ v_{ze}]$$

收稿日期:2017-05

式中:  $x_e, y_e, z_e$  分别表示弹丸的射向距离、高度和侧偏;  $v_{xe}, v_{ye}, v_{ze}$  分别表示弹丸速度  $X, Y$  和  $Z$  轴方向的分量<sup>[8]</sup>。

构建的弹道模型为:

$$\frac{d}{dt}X(t) = f(X(t)) + \Gamma(t)W(t)$$

$$Z(t) = h(X(t)) + V(t)$$

其中  $X(t)$  表示弹丸的状态,  $W(t)$  是过程噪声,  $\Gamma(t)$  是噪声驱动阵,  $Z(t)$  表示量测变量,  $V(t)$  为量测噪声。

2) 计算积分步长

假设弹道外推过程中低基面和高基面在炮口坐标系的高度分别为  $S_1$  和  $S_2$ ;

若  $y_e > s_2$ , 即弹道滤波结束点的高度大于高基面的高度  $S_2$ 。

① 积分步长取  $\Delta h_1$  进行后向积分, 计算

$$k_1 = y_1(x_{1n}, y_{1n})\Delta h_1;$$

$$k_2 = y'_1\left(x_{1n} + \frac{\Delta h_1}{2}, y_{1n} + \frac{k_1}{2}\right)\Delta h_1$$

$$k_3 = y'_1\left(x_{1n} + \frac{\Delta h_1}{2}, y_{1n} + \frac{k_2}{2}\right)\Delta h_1$$

$$k_4 = y'_1\left(x_{1n} + \frac{\Delta h_1}{2}, y_{1n} + \frac{k_3}{2}\right)\Delta h_1$$

$$y_{1(n+1)} = y_{1n} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

式中:  $x_{1n}, y_{1n}(n=0, 1, 2, \dots)$  表示第  $n$  次计分的值,  $x_{10} = x_e, y_{10} = y_e$ ;

② 重复①的计算过程直到  $y_{1(n+1)} \leq s_2$ , 记录此次积分时间  $T_a$ ;

③ 令

$$y_{20} = y_{1(n+1)}, x_{20} = x_{1(n+1)}, \Delta h_2 = \Delta h_1,$$

④ 向弹丸起始点进行积分, 计算过程为:

$$k_1 = y'_2(x_{2n}, y_{2n})\Delta h_2$$

$$k_2 = y'_2\left(x_{2n} + \frac{\Delta h_2}{2}, y_{2n} + \frac{k_1}{2}\right)\Delta h_2$$

$$k_3 = y'_2\left(x_{2n} + \frac{\Delta h_2}{2}, y_{2n} + \frac{k_2}{2}\right)\Delta h_2$$

$$k_4 = y'_2\left(x_{2n} + \frac{\Delta h_2}{2}, y_{2n} + \frac{k_3}{2}\right)\Delta h_2$$

重复④的计算过程直到满足下列条件中的一个:

$y_{2(n+1)} \leq s_1$  或者  $T_b \geq 4$ , 其中  $T_b$  表示积分时间<sup>[9]</sup>。

若  $y_e \leq s_2$ , 即弹道滤波结束点的高度小于高基面的高度  $S_2$ 。

① 积分步长取  $\Delta h_1$  进行前向积分, 计算过程:

$$k_1 = y_1(x_{1n}, y_{1n})\Delta h_1$$

$$k_2 = y_1\left(x_{1n} + \frac{\Delta h_1}{2}, y_{1n} + \frac{k_1}{2}\right)\Delta h_1$$

$$k_3 = y'_1\left(x_{1n} + \frac{\Delta h_1}{2}, y_{1n} + \frac{k_2}{2}\right)\Delta h_1$$

$$k_4 = y'_1\left(x_{1n} + \frac{\Delta h_1}{2}, y_{1n} + \frac{k_3}{2}\right)\Delta h_1$$

$$y_{1(n+1)} = y_{1n} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

式中:  $x_{1n}, y_{1n}(n=0, 1, 2, \dots)$  表示第  $n$  次计分的值,  $x_{10} = x_e, y_{10} = y_e$ ;

② 重复①的计算过程直到  $y_{1(n+1)} \geq s_2$ , 记录此次积分时间为  $T_a$ ;

③ 令

$$y_{20} = y_{1(n+1)}, x_{20} = x_{1(n+1)}, \Delta h_2 = \Delta h_1,$$

④ 向弹丸起始点进行积分, 计算过程为:

$$k_1 = y'_2(x_{2n}, y_{2n})\Delta h_2$$

$$k_2 = y'_2\left(x_{2n} + \frac{\Delta h_2}{2}, y_{2n} + \frac{k_1}{2}\right)\Delta h_2$$

$$k_3 = y'_2\left(x_{2n} + \frac{\Delta h_2}{2}, y_{2n} + \frac{k_2}{2}\right)\Delta h_2$$

$$k_4 = y'_2\left(x_{2n} + \frac{\Delta h_2}{2}, y_{2n} + \frac{k_3}{2}\right)\Delta h_2$$

⑤ 重复④的计算过程直到满足下列条件中的一个:

$y_{2(n+1)} \leq s_1$  或者  $T_b \geq 4$ , 其中  $T_b$  表示积分时间<sup>[10]</sup>;

3) 进行弹道外推, 积分时间间隔限  $\Delta t = |T_a - T_b| / 45, t_n = n^* \Delta t$ , 令  $x_0 = x_e, y_0 = y_e$ , 计算过程为:

$$k_{1x} = x'(t_n)\Delta t$$

$$k_{2x} = x'\left(t_n + \frac{k_{1x}}{2\Delta t}\right)\Delta t$$

$$k_{3x} = x'\left(t_n + \frac{k_{2x}}{2\Delta t}\right)\Delta t$$

$$k_{4x} = x'\left(t_n + \frac{k_{3x}}{2\Delta t}\right)\Delta t$$

$$x_{(n+1)} = x_n + \frac{1}{6}(k_{1x} + 2k_{2x} + 2k_{3x} + k_{4x})$$

$$k_{1y} = y'(t_n)\Delta t$$

$$k_{2y} = y'\left(t_n + \frac{k_{1y}}{2\Delta t}\right)\Delta t$$

$$k_{3y} = y'\left(t_n + \frac{k_{2y}}{2\Delta t}\right)\Delta t$$

$$k_{4y} = y'\left(t_n + \frac{k_{3y}}{2\Delta t}\right)\Delta t$$

$$y_{(n+1)} = y_n + \frac{1}{6}(k_{1y} + 2k_{2y} + 2k_{3y} + k_{4y})$$

4) 向炮口积分 45 步, 记录下积分结果<sup>[11]</sup>, 并将积分结果转换到雷达切平面坐标系中, 完成弹道外推过程, 最后一点即为弹道的起始位置<sup>[12]</sup>。

### 3 仿真与分析

本次实验在弹道外推过程中采用三步数值积分的方法外推弹丸的起始点, 求得炮位的位置<sup>[13]</sup>; 首先输入弹道轨迹滤波的结束点坐标值, 然后将低基面和高基面的坐标值转换到炮口坐标系中, 接着进行积分, 从第一次积分结束点向炮口进行第二次积分, 积分结束后记录积分值元值以及积分时间, 并由此外推积分时间的的时间间隔, 接着进行第 3 次积分, 完成外推过程, 最后将积分结果切换到雷达切平面坐标系。在本次仿真中给出两种初速度: 一是炮口初速度为 1 100 m/s, 另一种炮口初速度为 900 m/s。在

X轴上炮口初速度越大,变化的幅值越大;在Y轴上,炮口初速度越小,变化的幅值越大;在Z轴上,两种炮口初速度的幅度变化都很大。但是当域值达到一定值时,两种炮口初速度在X、Y、Z轴上趋于稳定,即本算法能够准确外推炮口的位置。

本算法在给定的弹道轨迹与低基面和高基面的相对位置上进行讨论,并进行两次数值积分确定弹道外推积分参数<sup>[14]</sup>,接着再次利用积分参数进行第3次数值积分去准确获得弹丸的起始位置,从而提高炮位雷达的准确度<sup>[15]</sup>。

图1是实施例弹道外推的X方向坐标的误差;图2是实施例弹道外推的Y方向坐标的误差;图3是实施例弹道外推的Z方向坐标的误差;图4是实验的流程。

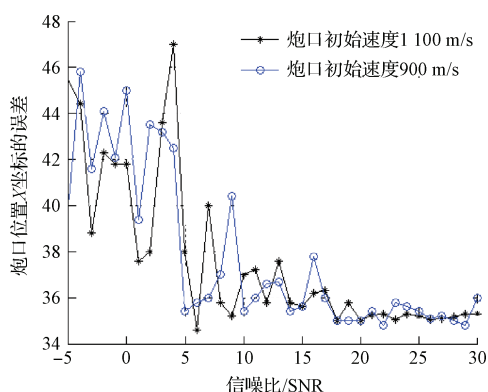


图1 实施例弹道外推的X方向坐标的误差

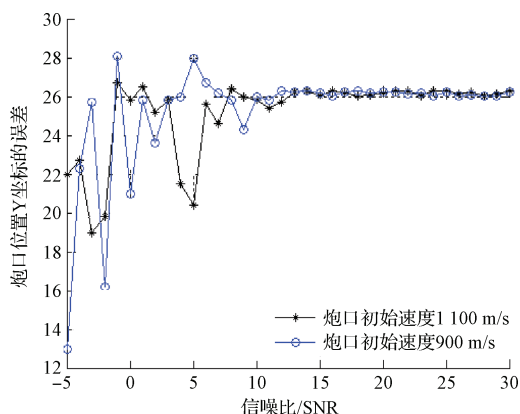


图2 实施例弹道外推的Y方向坐标的误差

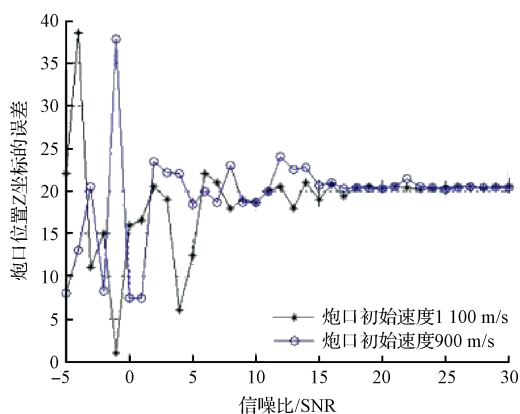


图3 实施例弹道外推的Z方向坐标的误差

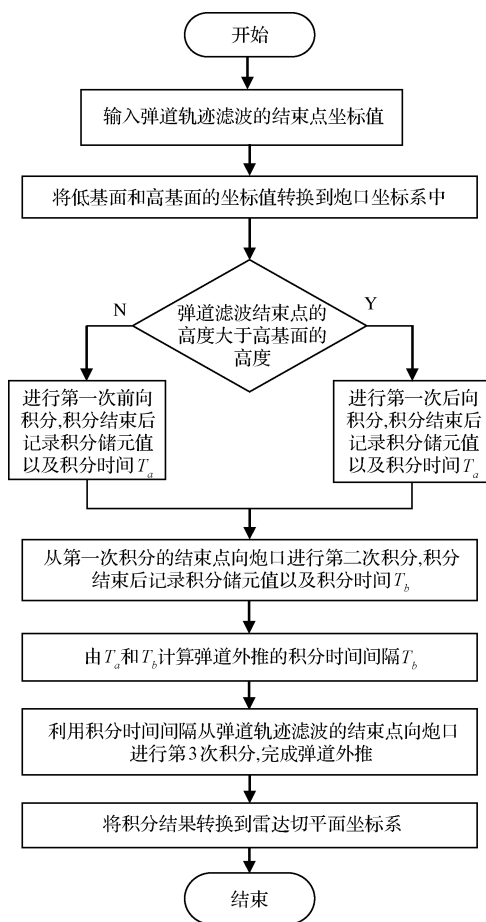


图4 实验流程

## 4 结论

关于弹道外推的方法,旨在为雷达经过弹道修正形成弹丸的飞行轨迹后反推出弹丸的发射位置。本实验能够有效保证弹道外推的精度,准确估计出弹丸的发射位置,适用于炮位雷达对于迫击炮和榴弹炮的弹道外推过程。

## 参考文献

- [1] 程攀, 黄晋, 王柱. 机械求积法及其外推算法求解 Helmholtz 非线性边界积分方程[J]. 应用数学和力学, 2011, 32(12):1405-1414.
- [2] 于洋. 基于 Hermite 插值的弹道外推算法[J]. 微计算机信息, 2011, 27(4):199-200.
- [3] 冯勇, 黄燕, 黄兵. 拟合弹道系数法进行弹道外推的研究[J]. 弹箭与制导学报, 2014, 34(2):117-119.
- [4] 李梦骄, 王建全, 赵志奇. 一种基于隐式数值积分的电力系统暂态稳定仿真方法. CN 102609575 A[P]. 2012.
- [5] 张莉芝. 多角形域上的数值积分公式的外推[J]. 贵州科学, 1996(1):18-24.
- [6] 韩超, 方露, 章盛. 一种优化的图像配准算法[J]. 电子测量与仪器学报, 2017, 31(2):178-184.

- [7] 王凤, 王同科. 两点边值问题非均匀网格二阶有限体积方法的外推[J]. 应用数学, 2013, 26(4): 900-913.
- [8] 杨录峰, 金云超. 一类含奇点函数的数值积分方法[J]. 云南民族大学学报:自然科学版, 2010, 19(1): 16-19.
- [9] 于文洁. 多体系统动力学 Galerkin 变分数值积分方法研究[D]. 青岛: 青岛科技大学, 2015.
- [10] 饶彬. 对抗条件下弹道目标的雷达跟踪技术研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2011.
- [11] 周彤, 顾金良, 刘静宝, 等. 高速弹丸测量的激光触发装置可靠性分析[J]. 国外电子测量技术, 2016, 35(10): 16-20.
- [12] 张广申, 毛征, 王宁, 等. 一种高炮射弹偏差计算方法及其仿真[J]. 国外电子测量技术, 2016, 35(11): 36-41.
- [13] 田会, 倪晋平, 焦明星. 抛物线弹道弹丸飞行参数测量模型与精度分析[J]. 仪器仪表学报, 2016, 37(1): 67-74.
- [14] 石岗, 李希胜, 李雪峰, 等. 航向测量系统中三轴磁传感器标定的等效两步法[J]. 仪器仪表学报, 2017, 38(2): 402-407.
- [15] 周娜, 鲁昌华, 徐婷佳, 等. 基于 EM 的多目标跟踪算法[J]. 电子测量与仪器学报, 2017, 31(1): 139-143.

## 作者简介

周进, 1992 年出生, 硕士研究生, 主要研究方向为信号与信息处理。

E-mail: 625498960@qq.com

## NI 宣布基于 Thunderbolt™ 3 的 PXI 系统远程控制解决方案

全新的 PXI 远程控制模块, 让高性价比 PXI 控制器产品系列如虎添翼

近日, NI(美国国家仪器公司, National Instruments, 简称 NI) 作为致力于为工程师和科学家提供解决方案来应对全球最严峻的工程挑战的供应商, 宣布推出 PXIe-8301 远程控制模块, 这是业界首款使用 Thunderbolt™ 3 技术, 通过笔记本电脑控制 PXI 系统的解决方案。

PXIe-8301 可通过 2 个 Thunderbolt 3 端口, 提供 PCI Express Gen 3 连接功能, 不仅提供最高性能, 还可实现高达 2.3 GB/s 的持续数据吞吐量。工程师可使用第二个端口, 以菊链方式连接额外的 Thunderbolt 3 或 USB-C 设备。PXIe-8301 具有现代连接功能且性价比高, 使得工程师能够以经济实惠的方式对 PXI 系统进行高性能控制, 方便他们进行台式设备特性分析和验证或者开发便携式自动化测试系统。

“过去 20 年来, PXI 平台已备受厂商与客户所青睐, 并广泛应用于多种不同的领域。”NI 杰出工程师兼 PXI 系统联盟(PXI Systems Alliance) 主席 Mark Wetzel 表示, “基于 Thunderbolt 3 的远程控制模块的出现, 不仅能展现 PXI 平台集成最新商用技术的能力, 更能让 PXI 平台进一步覆盖高性能、低成本且超便携的应用领域。”

PXIe-8301 进一步丰富了 NI 的高性价比 PXI 控制器系列, 该系列最近还推出一款嵌入式 PXI 控制器 PXIe-8821。PXIe-8821 专为测试与测量应用而设计, 搭载了 2.6 GHz Intel Core i3-4110E 双核心处理器, 最高可提供 2 GB/s 系统带宽。由于嵌入式控制器具备工业评级性能、外形小巧与生命周期管理完善等优点, 是在恶劣工作环境中长久部署 PXI 系统的理想选择。

远程控制模块与嵌入式控制器是 NI 平台与生态系统非常重要的一部分, 旨在帮助工程师轻松构建更智能的测试系统。这些测试系统将受益于从直流到毫米波等不同工作频率范围的 600 多个 PXI 产品。它们采用 PCI Express 第三代总线接口, 具有高吞吐量数据移动, 同时具有亚纳秒级同步以及集成的定时和触发。NI 平台受到一个由合作伙伴、附加 IP 和应用工程师组成的活跃生态系统的支持, 可帮助工程师大幅降低测试成本, 缩短上市时间以及确保测试装置能够适应未来需求, 解决未来挑战。

阅读这篇技术白皮书, 了解全新的 Thunderbolt 3 远程控制模块如何帮助工程师构建更智能的测试系统。