

超高斯激励下的线性系统响应研究

王鹏宇¹ 王慧娟²

(1. 国网山西省电力公司电力科学研究院 太原 030001; 2. 国网朔州供电公司 朔州 036002)

摘 要:传统随机振动试验的频域方法所模拟的是平稳高斯信号,但是实际振动环境往往是超高斯的,尤其是输电塔线系统受到的风载,且超高斯激励和高斯激励对结构的损害差异很大,因此对超高斯振动环境试验的研究就变得尤为重要。线性系统响应的超高斯特性研究是超高斯振动环境试验的关键,也是实现功率谱密度和峭度同时复现的基础。本文研究了超高斯激励下的线性系统响应,推导得到了响应峭度的时域和频域计算公式,并给出单自由度线性系统响应峭度的具体表达式。公式揭示了线性系统响应的超高斯特性与系统的阻尼比和激励的超高斯特性之间的关系,通过仿真验证了这一结论。最后搭建试验平台,对一根单输入单输出的悬臂梁进行了振动控制试验。试验结果表明其输出响应谱与给定的参考谱之间的误差完全满足工程中 ± 3 dB要求,而峭度则满足完全满足参考要求。

关键词:超高斯; 输电塔线系统; 功率谱密度; 峭度; 单自由度线性系统

中图分类号: TN911.7 TB123 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 520.6020

Study on response of the linear system excited by super-Gaussian signals

Wang Pengyu¹ Wang Huijuan²

(1. Electric Research Institute, State Grid Shanxi Electric Power, Taiyuan 030001, China;

2. State Grid Shuozhou Power Supply Company, Shuozhou 036002, China)

Abstract: The traditional random vibration test with frequency domain method aims to generate a stationary and Gaussian vibration environment. But the practical vibration environments are always super-Gaussian, especially the wind load of transmission tower-line system, which can cause different damages to the structures compared with Gaussian excitations. Thus, it is significant to study the super-Gaussian test method. The research of characteristics of super-Gaussian linear system response is the key to super-Gaussian environment vibration test, and is the basis of PSD and kurtosis repetition. The response of the linear system excited by super-Gaussian signals is studied, the formulas of response kurtosis are derived in both time and frequency domain. The concrete expression of the single degree of freedom linear system response kurtosis is displayed. This formula indicates that the super-Gaussian characteristics of the linear system response is related to excitation's super-Gaussian characteristics and system damping ratio, and the conclusion is verified by simulations. Phase selection method and traditional PSD decomposition method are used to generate super-Gaussian driving signal according to reference power spectrum density and kurtosis. Finally, a SISO cantilever beam control experiment results indicate that the error between output response spectrum and reference spectrum based on the proposed control algorithm meets the requirement ± 3 dB in engineering, and the kurtosis meets the reference requirement.

Keywords: super-Gaussian; transmission tower-line system; power spectrum density; kurtosis; single freedom linear system

0 引 言

在很多工程领域,模型载荷往往用统计量来描述,那么结构响应就需要用累积量或者中心距来准确地估计。

传统的振动环境模拟只给定功率谱密度(PSD)^[1],其信号是高斯信号,用二阶累积量就可以完全描述。在很多实际工程的研究中,激励往往是超高斯信号,就需要三阶、四阶,甚至更高阶的累积量描述。比如加载在结构上的波浪

载荷^[2]、路面载荷^[3],以及输电塔线体系受到的风载^[4]。当PSD保持不变时,随机信号可能有不同的峭度^[5]值,超高斯信号必然比高斯信号对结构造成更大的损伤^[6]。因此,产品、装备在实验室高斯振动环境试验下所得结果往往与外场的实际使用结果有很大差异。所以,在振动环境试验中,除了对装备外场实测响应的功率谱密度(PSD)进行复现外,还应该对实测响应的峭度(Kurtosis)也同时复现。对于线性系统,激励信号具有高斯性,响应过程也具有高斯性^[7]。但是对于受到超高斯激励的线性系统,对其响应的特性研究较少。能找到响应峭度与系统特性(质量、刚度、阻尼)和激励峭度的关系,对于超高斯环境振动实验的控制有很大的帮助。Steinwolf通过仿真分析研究了单自由度系统在非高斯激励下响应信号的非高斯统计特性,并分析了影响响应峭度的因素^[8]。Grigoriu建立了非高斯随机过程的线性模型,并基于此研究了单自由度系统在非高斯激励下的动态响应问题^[9]。Rizzi根据时间序列的特征^[10],将非高斯过程分为平稳非高斯信号和突变非高斯信号,并初步研究了非高斯激励下线性结构响应问题。但是以上研究并没有给出响应峭度与激励峭度和系统特性的具体数学关系。

因为功率谱密度可以决定时域序列的二阶累积量,因此PSD不能完全地描述非高斯信号的统计特性,需要进一步引入高阶谱理论,双谱可以决定时域序列三阶累积量,三谱决定四阶累积量,依次类推^[11]。本文借助于这一理论,首先分别从时域和频域给出了单自由度系统弹簧质量块系统输出峭度与系统特性、输入峭度之间的数学关系。其次,通过MATLAB仿真计算,对比分析了不同峭度值和阻尼比对响应峭度的影响。最后以一根悬臂梁为研究对象,实现了峭度和功率谱密度的同时复现,进一步验证了上述研究结论的正确性和实用性。本文对超高斯线性系统^[12]响应的研究可以应用于输电塔线系统在超高斯环境载荷^[13]下的疲劳可靠性研究。

1 基础理论介绍

考虑如图1所示的线性时不变系统,输入信号是试件受到的激励力,记为 $x(t)$,该激励信号是理想白色超高斯过程,即在所有频率下为平坦谱。输出信号是试件对激励信号的响应位移,记为 $y(t)$ 。假设没有外界噪声的影响,该系统的单位脉冲响应函数为 $h(t)$ 。下面讨论在 $x(t)$ 为超高斯激励条件下,响应 $y(t)$ 的幅值分布特性(峭度值)。

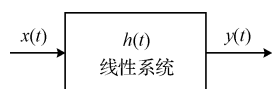


图1 SISO线性系统模型

通常概率密度分布为非正态分布的随机信号统称为超高斯信号,在工程中采用峭度来描述。本文采用如下峭度定义:

$$K = \frac{E[X - E(X)]^4}{\{E[X - E(X)]^2\}^2} - 3 \quad (1)$$

该单输入单输出线性时不变系统响应和输入的关系为:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)x(t-\theta)d\theta \quad (2)$$

式中: $\theta=t-\tau$ 表示脉冲发生时刻 τ 与进行计算时刻 t 之间所经过的时间,则 θ 的积分限应为 $0\sim\infty$,又考虑到 $\theta<0$ 时 $h(\theta)=0$,所以积分限又可以用 $-\infty\sim\infty$ 表示。

输入 $x(t)$ 的二阶累积量为:

$$Q_{2x}(\tau) = \text{cum}[x(t), x(t+\tau)] \quad (3)$$

式中:cum是累积量计算公式。

输入 $x(t)$ 的四阶累积量为:

$$Q_{4x}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \text{cum}[x(t), x(t+\tau_1), x(t+\tau_2), x(t+\tau_3)] \quad (4)$$

对于稳态过程,累积量是3个时间参数的函数,对 $j=1, 2, 3$, $\tau_j = t_{j+1} - t_1$,因此用 $Q(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ 来定义该稳态过程的累积量。

平稳的高斯白噪声有恒定的功率谱密度值 $C_{2x}(\omega) = S_0$,其二阶累积量(自相关函数)为:

$$Q_{2x}(\tau) = 2\pi S_0 \delta(\tau) \quad (5)$$

超高斯白噪声过程还需要三维谱密度函数超高斯白噪声过程还需要三维谱密度函数 $C_{4x}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$,做直观的推广^[14],超高斯白噪声有:

$$C_{4x}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = C_0 \quad (6)$$

对于高斯信号,其二维谱密度和三维谱密度均等于0,而超高斯信号(不考虑偏度)的三维谱密度大于零。四阶累积量及其三维谱密度的关系为:

$$Q_{4x}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 8\pi^3 C_0 \delta(\tau_1) \delta(\tau_2) \delta(\tau_3) \quad (7)$$

平稳随机过程自相关函数的傅里叶变换是其自功率谱密度,类似地用 $C_{4x}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ 定义 $Q_{4x}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ 的三维傅里叶变换,因此有:

$$\sigma_{2x} = Q_{2x}(0) = \int S_x(\omega) d\omega \quad (8)$$

$$\gamma_{4x} = Q_{4x}(0, 0, 0) = \iiint C_{4x}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \quad (9)$$

2 推导过程

第1节中定义了超高斯激励的各阶累积量,响应的二阶累积量和四阶累积量分别为:

$$Q_{2y}(\tau) = \text{cum}[y(t), y(t+\tau)] = \text{cum}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_1)x(t-\theta_1)d\theta_1, \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_2)x(t+\tau-\theta_2)d\theta_2\right] = \prod_{i=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_i)d\theta_i \times Q_{2x}(\tau+\theta_1-\theta_2) \quad (10)$$

$$Q_{4y}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \text{cum}[y(t), y(t+\tau_1), y(t+\tau_2), y(t+\tau_3)] = \text{cum}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_1)x(t-\theta_1)d\theta_1, \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_2)x(t+\tau_1-\theta_2)d\theta_2, \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_3)x(t+\tau_2-\theta_3)d\theta_3, \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_4)x(t+\tau_3-\theta_4)d\theta_4\right]$$

$$\begin{aligned} \theta_4) d\theta_4] &= \prod_{i=1}^4 \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_i) d\theta_i \times \text{cum}(x(t-\theta_1), x(t+\tau_1-\theta_2), \\ x(t+\tau_2-\theta_3), x(t+\tau_3-\theta_4)) &= \prod_{i=1}^4 \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_i) d\theta_i \times \\ Q_{4,x}(\tau_1+\theta_1-\theta_2, \tau_2+\theta_1-\theta_3, \tau_3+\theta_1-\theta_4) \end{aligned} \quad (11)$$

对式(10)两边同时傅里叶变换可得:

$$C_{2,y}(\omega) = |G(\omega)|^2 C_{2,x}(\omega) \quad (12)$$

$$K_{4,y} = \frac{\iiint h(\theta) h(\theta-\theta_1) h(\theta-\theta_2) h(\theta-\theta_3) Q_{4,x}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) d\theta d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3}{[\iint h(\theta) h(\theta-\theta_1) Q_{2,x}(\theta_1) d\theta d\theta_1]^2} \quad (14)$$

或者表示为频域形式:

$$K_{4,y} = \frac{\iiint G(\omega_1) G(\omega_2) G(\omega_3) G^*(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) C_{4,x}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3}{[\int |G(\omega)|^2 C_{2,x}(\omega) d\omega]^2} \quad (15)$$

考虑一个单自由度线性时不变系统,其运动微分方程为:

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = x \quad (16)$$

该系统脉冲响应函数为:

$$h(t) = \frac{1}{\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \sin\omega_d t \quad (17)$$

系统的阻尼振动频率为:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \quad (18)$$

式中: ω_n 为固有频率, ξ 为阻尼比;

该单自由度系统的频响函数为:

$$G(\omega) = \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\xi\omega_n\omega} \quad (19)$$

借助于数学软件 Mathematica,不论用式(14)所示的时域计算公式还是式(15)所示的频域计算公式,均可计算得到响应峭度表达式中的分母为 $\pi^2 S_0^2 / 4\xi^2 (\omega_n)^6$,分子为 $3\pi^3 C_0 / 4(\xi + 3\xi^3)(\omega_n)^5$ 。

最终得到输出响应的峭度值为:

$$K_{4,y} = \frac{3\pi C_0 \omega_0 \xi}{S_0^2 (1 + 3\xi^2)} \quad (20)$$

对于一个高斯白噪声信号,在物理上是无法实现的,因为它的能量是无穷大的(方差无穷大),对于超高斯白噪声,它的四阶累积量也是无穷大的。然而,只要系统中存在阻尼,响应的方差和四阶累积量就都是有限的,正如式(20)所示一样。这一等式同样揭示了当系统阻尼比接近于零时,不论输入是高斯的($C_0=0$)还是超高斯的($C_0>0$),输出响应的峭度都趋向于零;当阻尼比增大时,输出信号就能保持一定的超高斯特性。

3 仿真实验

为了验证上面公式推导及结论的正确性,对一个单自由度的弹簧质量块系统做激励实验,对其输入和输出信号的峭度值做分析。其物理参数设置为:质量 $m=1$ kg;刚度系数 $k=80\ 000$ N/m(得到固有频率 $f_n = \sqrt{k/m}/2\pi$,接近于 45 Hz);系统的阻尼 c 分别为 0.565 7 N/(m/s)、

对式(11)两边同时取三维傅里叶变换可得:

$$C_{4,y}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = G(\omega_1) G(\omega_2) G(\omega_3) G^*(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \cdot C_{4,x}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \quad (13)$$

式中: $*$ 代表共轭转置。

那么响应的峭度可以表示为时域形式:

5.656 9 N/(m/s)、28.284 2 N/(m/s);系统对应的阻尼比 ξ 分别设为 0.001、0.01、0.05。系统模型如图 2 所示。

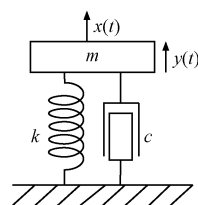


图2 单自由度振动系统

设定输入信号的功率谱带宽为 20~90 Hz。按照相位调节方法^[15]生成峭度值分别为 0、1、2、3、4、5、6、7、8 的超高斯激励信号。用这 9 组不同峭度值的超高斯信号分别激励上图中所给单自由度线性系统,并分别求取各自响应的峭度值,得到不同阻尼比下单自由度弹簧阻尼系统的输入和输出峭度值的对比图,如图 3 所示。

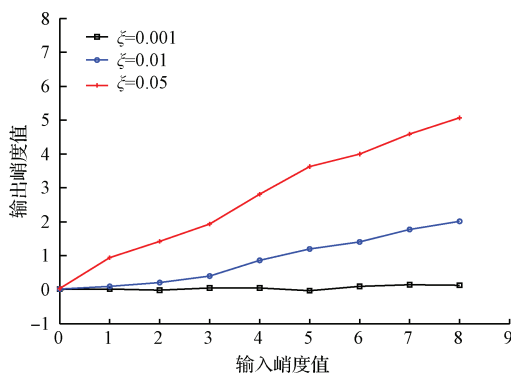


图3 不同阻尼比下输出峭度与输入峭度的关系

从图中可以清楚地看到,大阻尼比系统的响应比小阻尼比系统的响应更能保持输入信号的超高斯特性;当输入峭度为 0 时,即输入信号为高斯信号,则输出的信号也表现为高斯特性;当阻尼比很小时,不论输入是高斯的($C_0=0$)还是超高斯的($C_0>0$),输出峭度都趋向于零,即都趋于高斯过程。另外,从仿真结果可以得到这样的结论:当系

统阻尼比较大时,输出峭度与输入峭度之间存在正相关的关系。这也为接下来做单输入单输出梁的振动控制实验峭度的调节提供了思路。

4 悬臂梁振动控制试验

取一悬臂梁^[12]系统作为研究对象。悬臂梁的长(l)、宽(b)、高(h)分别为 0.8 m, 0.04 m, 0.016 m, 质量密度为 $2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 弹性模量为 71 GPa。激励点和控制点如图 4 所示。



图 4 超高斯随机振动试验现场

试验设备和试验现场如图 4 所示。试验所需设备: Agilent VXI 一台, 电脑一台, HEAS-2 功率放大器一台, HEV-50 激励器一台, PCB 333B32 加速度传感器一个。

假设控制点的加速度响应参考谱值和峭度值如表 1 中所示, 对应的 PSD 谱型如图 5 中的细实线所示。

表 1 响应信号参考谱值和峭度值

频率/Hz	G 谱密度/(g^2/Hz)
20	$1\text{e-}3$
100	$1\text{e-}1$
1 000	$1\text{e-}1$
2 000	$1\text{e-}2$
峭度	3

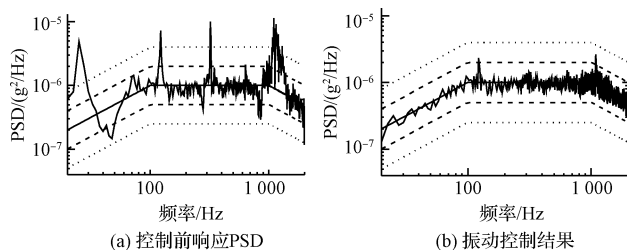


图 5 随机响应 PSD

以加速度谱作为控制目标分析频段为 20~2 000 Hz, 不同频段交越频率节点为 100 Hz 和 1 000 Hz。响应点设置: 20~100 Hz 的斜率为 3 dB/oct, 20~1 000 Hz 为平谱, 幅值为 $10^{-6} \text{ g}^2/\text{Hz}$, 1 000~2 000 Hz 的斜率为 -4 dB/oct。设置误差线 $\pm 3 \text{ dB}$, 停车线 $\pm 6 \text{ dB}$, 谱线数 800。试验测得频响函数如图 6 所示。

通过前面的理论分析和仿真验证得知, 当系统阻尼比

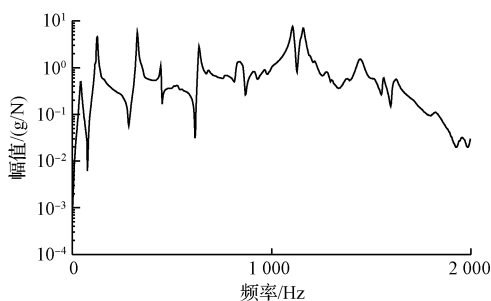


图 6 悬臂梁频响函数幅频

较大时, 输出峭度与输入峭度是正相关的, 即当输入峭度增大, 输出峭度也增大, 输入峭度减小, 输出峭度也减小。因此可以借鉴响应谱的比例均方根控制法, 对响应峭度的控制方法也可以采用比例控制算法, 即 $K_d^{i+1} = K_d^i \cdot \frac{K_i^i}{K}$, 第 $i+1$ 次的输入峭度值等于第 i 次输入峭度值乘以第 i 次输出峭度值与参考峭度的比值, 通过不断地修正, 最终使得输出峭度值与参考峭度值满足精度要求。控制前后得到的随机响应谱如图 5 所示。

在进行随机控制之后, 随机响应有了很大程度的改善, 超标谱线明显减少。响应点在 125 Hz 和 1 000 Hz 处的功率谱值仍有超标, 这两个频率在悬臂梁的第二阶和第五阶固有频率附近, 但其它频率处已经完全在 $\pm 3 \text{ dB}$ 以内。如图 7 所示, 响应信号经过多次峭度修正具有了良好的超高斯特性, 其峭度为 3.08, 满足参考峭度要求。

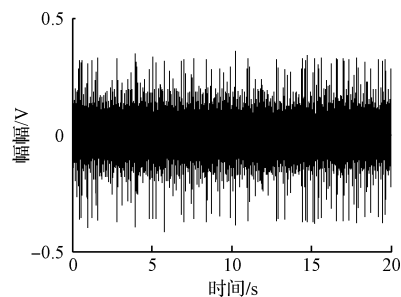


图 7 响应信号

5 结论

本文通过理论分析推导得出了并给出单自由度线性系统响应峭度的具体表达式。公式揭示了线性系统响应的超高斯特性与系统的阻尼比和激励的超高斯特性之间的关系, 通过仿真验证了这一结论。搭建实验平台, 用功率谱分解法和相位调节法生成了满足参考谱要求和峭度要求的超高斯随机驱动信号, 采用比例控制算法不断修正响应谱和响应峭度, 使得输出响应谱基本被控制在参考谱 $\pm 3 \text{ dB}$ 的误差带范围内, 而且响应峭度的控制也达到了很高的控制精度。本文的课题研究对输电塔线系统疲劳可靠性研究具有参考价值。

参 考 文 献

- [1] 胡为,庄奕琪,包军林,等. 红外探测器低频噪声长时间监测系统设计[J]. 电子测量与仪器学报, 2015, 29(2): 265-271.
- [2] ROUILLARD V, SEK M. Creating transport vibration simulation profiles from vehicle and road characteristics [J]. Packaging Technology and Science, 2013, 26(2): 82-95.
- [3] TOFFOLI A, ONORATO M, OSBORNE AR, et al. Non-gaussian properties of shallow water waves in crossing seas [M]. Dordrecht: Springer Netherlands, 2008: 53-69.
- [4] 汤志云. 输电塔线体系在风荷载作用下的位移响应[D]. 广州: 广东工业大学, 2013.
- [5] 桑迎平, 蔡晋辉, 曾九孙, 等. 基于形态优化滤波的轴承故障特征提取方法 [J]. 电子测量与仪器学报, 2016, 30(5): 757-763.
- [6] 蒋瑜, 陶俊勇, 陈循. 超高斯随机振动疲劳加速试验模型研究[J]. 振动与冲击, 2017, 36(9): 261-266.
- [7] BENFRATELLO S, CADDEMI S, MUSCOLINO G. Gaussian and non-gaussian stochastic sensitivity analysis of discrete structural system[J]. Comput Struct, 2000, 78(1-3): 425-434.
- [8] ALEXANDER S. Vibration testing of vehicle components by random excitations with increased kurtosis[J]. Int. J. of Vehicle Noise and Vibration, 2015, 11(1): 39-66.
- [9] GRIGORIU M. Linear models for non-gaussian processes and applications to linear random vibration[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2011, 26(3): 461-470.
- [10] RIZZI S A, PRZEKOP A, TURNER T. On the response of a nonlinear structure to high kurtosis non-Gaussian random loadings [EB/OL]. 2013. <http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20110013658.2011014239.pdf>
- [11] RIZZI S A, PRZEKOP A, TURNER T L. On the response of a nonlinear structure to high kurtosis non-Gaussian random loadings[J]. 2011, 35(8): 245-253.
- [12] 何轲, 王海燕, 申晓红, 等. 一种基于四阶累积量的声定向方法[J]. 国外电子测量技术, 2011, 30(2): 9-13.
- [13] 张刚, 宋莹, 张天骐, 等. Levy 噪声下一阶线性系统的弱信号复原分析[J]. 仪器仪表学报, 2016, 37(1): 109-118.
- [14] 崔宏敏, 陈宝成, 丁钟凯, 等. 压力传感器结构参数识别及优化方法 [J]. 仪器仪表学报, 2016, 37(12): 2805-2812.
- [15] 统计信号处理: 非高斯信号处理及其应用[M]. 北京: 电子工业出版社, 2004: 55-58.
- [16] 王鹏宇, 陈怀海. 一种单输入单输出超高斯振动试验控制方法[J]. 国外电子测量技术, 2016, 35(3): 67-70.

作 者 简 介

王鹏宇, 1991 年出生, 硕士研究生, 主要研究方向为电网振动试验与控制、数值模拟及寿命评估。
E-mail: wangpengyudky@163.com

王慧娟, 1987 年出生, 本科生, 主要研究方向为配电网继电保护整定技术。