

DOI: 10.19650/j.cnki.cjsi.J2413450

# 提高谐波残差阶次的圆光栅自标定方法

池 峰, 纪鹏宇, 姜博文, 黄银国

(天津大学精密仪器与光电子工程学院 天津 300072)

**摘要:**圆光栅是实现超高精度全圆周角度测量的重要工具,在微纳加工、瞄准定位和计量科学等领域起着重要作用。圆光栅自标定技术通过布置读数头,并采用特定的数据处理方法分离系统误差,克服了测量量程小和缺乏更高参考基准的问题,从而实现自标定。为了提高圆光栅角度测量精度,降低圆光栅自标定中谐波抑制的影响,故提出一种含素数夹角的多读数头自标定方法,以提高谐波残差阶次。基于传递函数法的自标定原理,研究了残差阶次与读数头夹角的定量关系,建立了残差阶次为360整数倍的多读数头布局夹角计算公式。利用该公式计算得到六读数头布局夹角,计算结果表明:对于360点采样的数据,对比实验的布局1残差为0.8",残差阶次是6的整数倍;布局2残差为0.2",残差阶次是40的整数倍;该方法得到的本文布局残差为 $3 \times 10^{-13}$ ",残差阶次为360的整数倍。通过搭建六读数头自标定实验,使用本文方法消除94.37%的圆光栅测角系统的误差,实现了圆光栅测角系统的全圆周标定,且重复性良好,验证了在实际应用中的有效性。本标定方法极大提高了圆光栅自标定中谐波残差的阶次,对减小测角谐波误差有一定的参考价值,为超高精度角位移传感器的实现提供支撑。

**关键词:**圆光栅;自标定;布局方法;谐波残差

中图分类号: TH741.23 文献标识码: A 国家标准学科分类代码: 460.4020

## Self-calibration method of circular grating to increase the order of harmonic residuals

Chi Feng, Ji Pengyu, Jiang Bowen, Huang Yinguo

(School of Precision Instrument and Opto-Electronics Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

**Abstract:** Circular grating is an important tool to achieve ultra-high precision full circle Angle measurement, which plays an important role in micro and nano machining, aiming and positioning, metrology science and other fields. The circular grating self-calibration technique overcomes the problems of small measuring range and lack of higher reference datums by arranging reading heads and using specific data processing methods to separate systematic errors, thereby enabling self-calibration. To improve the Angle measurement accuracy of circular gratings and reduce the harmonic suppression in circular grating self-calibration, a multi-reading-head self-calibration method is proposed to increase the harmonic residual order. Based on the transfer function method, the relationship between the residual order and the Angle of the reading head is studied, and the formula for calculating the Angle of the multi-reading head with the residual order of 360 integers is established. The calculation results show that for the data sampled from 360 points, the residual of layout 1 in the comparison experiment is 0.8", and the residual order is an integer multiple of 6. Layout 2 has a residual of 0.2", and the residual order is an integer multiple of 40. The proposed layout 3 obtained by this method has a residual of  $3 \times 10^{-13}$ ", and the residual order is an integer multiple of 360. By conducting a self-calibration experiment with six reading heads, the proposed method eliminates 94.37% of the errors in the circular grating angle measurement system, achieving full-circle calibration with excellent repeatability. This demonstrates the method's effectiveness in practical applications. This calibration method significantly enhances the order of harmonic residual in the self-calibration of circular gratings, which offers valuable reference for mitigating harmonic errors in angular measurements and supports the development of ultra-high precision angular displacement sensors.

**Keywords:** round grating; self-calibration; layout methods; harmonic residuals

## 0 引言

圆光栅是常用的角度位置反馈装置,广泛应用于高精度测量和控制系统中。由于圆光栅测角系统中存在多种系统误差的耦合,如何在大量程条件下实现更高精度的标定成为一大挑战。圆光栅自标定技术通过布置单个或多个读数头,并采用特定的数据处理方法对圆光栅系统误差进行分离,实现自我标定。这一方法克服了测量量程小和缺乏更高参考基准的问题,突破了角位移标定的精度上限,为研制全圆周、超高分辨率的角度位移传感器提供了可能。

目前通过多个读数头进行一定的布局来获取传感器的系统误差,对测量数据补偿进而提高角位移传感器测量精度成为了圆光栅自标定的一个主流研究方向。张文颖等<sup>[1-2]</sup>通过6个读数头均匀排布的等分平均法(equal division average, EDA)消除了6的整数倍阶次以外的系统误差,在六读数头均匀分布的基础上提出一种优化方式,通过共用同一个基准读数头的4均分和3均分,进一步提升自标定精度。德国联邦物理技术研究院<sup>[3]</sup>采用8个主读数头的均布方式,利用传递函数法消除了8的整数倍阶次以外的系统误差;Jiao等<sup>[4]</sup>提出基于传递函数法的优化布局方式,消除了40的整数倍阶次以外的系统误差,从而实现对传感器的高精度标定。任曦等<sup>[5]</sup>应用四读数头均分的EDA自标定原理,将圆光栅的测角精度从15"提升到0.8"。中国计量科学院拥有我国最高的角度计量标准,开发的基于三~四读数头圆光栅全圆周角度测量装置,分别使用两次EDA原理,全圆周连续角度标准装置测量不确定度可达0.05"(k=2)<sup>[6-8]</sup>。

由于谐波抑制现象的存在,上述自标定方法所得到的误差均是部分系统误差,即有一定的残余误差尚未标定,这极大地限制了自标定方法精度的进一步提高。随着测角精度要求的提高,残余误差越来越无法忽视。因此,本文使用基于传递函数<sup>[9-10]</sup>的自标定方法,对其读数头的布局方式进行了深入分析,确定了谐波残差阶次与读数头夹角的定量关系,提出一种谐波残差为360及其整数倍的读数头布局方法,以解算得到更高准确的系统误差。

## 1 自标定原理

随着精密轴系在角位移传感器系统中的应用,轴系的随机跳动已经可以控制到一个较小的范围里了。在此前提下,建立系统误差的自标定模型<sup>[9-10]</sup>。

对于一个正常使用的角位移传感器,在较短的时间内,针对某一个位置的读数头,其系统误差是可以视为没

有发生改变的<sup>[11-12]</sup>。假设在多读数头角位移传感器测量系统中,已经按照一定角度布置好S个读数头,如图1所示,并且已经完成了N点的全圆周均匀采样,选取一个读数头为基准读数头,其系统误差是测量真值 $\varphi$ 的函数,记为 $\delta_1(\varphi)$ ,该误差表征了由于固定偏心,栅盘倾斜,刻线刻划<sup>[13-15]</sup>不准等因素引入的系统误差。

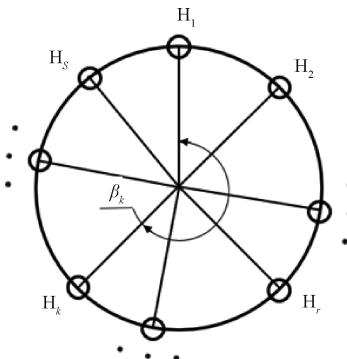


图1 多读数头布局

Fig. 1 Schematic diagram of multi-reading heads

则基准读数头的测量值 $\varphi_1(\varphi)$ 为:

$$\varphi_1(\varphi) = \varphi + \delta_1(\varphi) \quad (1)$$

将基准读数头视为第1个读数头,顺时针旋转,第k个读数头与基准读数头的夹角记为 $\beta_k$ ,显然 $\beta_1$ 为0。则第k个读数头处测得的系统误差与基准读数头处测得的系统误差存在一个相移关系,即:

$$\delta_k(\varphi) = \delta_1(\varphi + \beta_k) \quad (2)$$

第k个读数头的角度测量值, $\varphi_k(\varphi), k \in \{1, 2, \dots, S\}$ ,可以表示为:

$$\varphi_k(\varphi) = \varphi + \delta_k(\varphi) = \varphi + \delta_1(\varphi + \beta_k) \quad (3)$$

基准读数头测得数据中系统误差 $\delta_1(\varphi)$ 的傅里叶变换可以表示为:

$$F[\delta_1](m) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta_1(n) e^{-\frac{2\pi m n j}{N}}, m, n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4)$$

其中,m为频域信号的编号,n为离散信号的编号,N为离散信号的点数,且N个点足以描述该误差。

根据离散傅里叶变换(discrete Fourier transform, DFT)时移性质,可以得到第k个读数头测得数据中系统误差的DFT和基准读数头DFT的关系。

$$F[\delta_k](m) = F[\delta_1](m) e^{im\beta_k} \quad (5)$$

为了抵消未知的真值,将第k个读数头测得数据与第r个读数头的数据做差,记为 $\Delta\varphi_{kr}(\varphi)$ 。

$$\Delta\varphi_{kr}(\varphi) = \varphi_k(\varphi) - \varphi_r(\varphi) = \delta_k(\varphi) - \delta_r(\varphi) \quad (6)$$

根据傅里叶变换的线性可以得到 $\Delta\varphi_{kr}(\varphi)$ 的DFT:

$$F[\varphi_k - \varphi_r](m) = F[\Delta\varphi_{kr}](m) =$$

$$F[\delta_1](m) \times (e^{im\beta_k} - e^{im\beta_r}) \quad (7)$$

可以求得基准读数头测得圆光栅系统误差的 DFT。

$$F[\delta_1](m) = T_{kr}(m) F[\Delta\varphi_{kr}](m) \quad (8)$$

其中,  $T_{kr}(m)$  为传递函数<sup>[16]</sup>,  $m=0, 1, 2, \dots, N-1$ 。

$$T_{kr}(m) = \begin{cases} \frac{1}{e^{im\beta_k} - e^{-im\beta_r}}, & e^{im\beta_k} - e^{-im\beta_r} \neq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (9)$$

当有多组读数头时, 可以将不同读数头所测数据两两做差,  $S$  个读数头可以得到  $C_s^2$  组差值数据, 每一组差值数据可以得到一个基准读数头系统误差的 DFT。

$$F[\delta_1](m) = \sum_{k=1}^S \sum_{r=k+1}^S p_{kr}(m) T_{kr}(m) F[\Delta\varphi_{kr}](m) \quad (10)$$

根据方差最优原则, 赋予不同读数头不同的权重, 这个权重与  $T_{kr}(m)$  模的大小有关, 为:

$$p_{kr}(m) = \begin{cases} \frac{|T_{kr}(m)|^{-2}}{\sum_{k=1}^S \sum_{r=k+1}^S |T_{kr}(m)|^{-2}}, & \left( \sum_{k=1}^S \sum_{r=k+1}^S |T_{kr}(m)|^{-2} \neq 0 \right) \\ 0, & \left( \sum_{k=1}^S \sum_{r=k+1}^S |T_{kr}(m)|^{-2} = 0 \right) \end{cases} \quad (11)$$

显然:

$$\sum_{k=1}^S \sum_{r=k+1}^S p_{kr}(m) = 1 \quad (12)$$

根据式(10)可以得到基准读数头测得数据中所包含系统误差的离散傅里叶变换值  $F[\delta_1](m)$ , 根据傅里叶反变换便可求得系统误差  $\delta_1(\varphi)$ 。

## 2 多读数头布局方法

### 2.1 自标定原理与谐波残差的关系

在圆光栅的空间域里分析: 观察式(6), 将读数头  $k$  和读数头  $r$  的测量数据两两做差后, 可以得到一组只包含系统误差的一组数据  $\Delta\varphi_{kr}(\varphi)$ 。与此同时, 这么做也无可避免地损失了一部分的误差信息。系统误差可以看作是多个谐波叠加组成, 当两个读数头的位置夹角是  $60^\circ$ , 对于 6 阶谐波来讲, 相移  $60^\circ$  则发生了整个周期的相移, 在做差的过程中会被完全抵消掉, 因此差值数据中 6 阶谐波的信息就丢失了, 成为未被标定出的残余误差, 即残差。在频域里, 考察读数头的夹角与谐波残差, 可以得到其定量关系。观察式(9), 可以看出, 当  $T_{kr}(m)$  时, 将  $T_{kr}(m)$  赋值为 0, 以免在频域里出现幅值无穷大的情况。此时  $m$  阶谐波信息尚未被提取出来, 为谐波残差。

可以得到残差谐波阶次  $m_e$  与读数头夹角  $|\beta_k - \beta_r|$  的定量关系:

$$m_e = \frac{k_0 2\pi}{|\beta_k - \beta_r|}, k_0 = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

其物理含义是: 若  $m_e$  倍的  $|\beta_k - \beta_r|$  是  $2\pi$  的整数

倍, 则其系统误差中的  $m_e$  阶次谐波为谐波残差。例如, 两个读数头的位置夹角是  $60^\circ$ , 则其残差就包括  $1 \times 360^\circ / 60^\circ = 6$  阶次谐波。

当多对读数头做差,  $S$  个读数头可以得到  $C_s^2$  组差值数据, 这些数据解算出的残差谐波阶次也是不尽相同。利用这个特征可以提高残差的谐波阶次。考察由方差最优原则得到的权重表达式(11), 可以发现, 当  $\sum_{k=1}^S \sum_{r=k+1}^S |T_{kr}(m_0)|^{-2} \neq 0$  时, 若  $\sum_{k=1}^S \sum_{r=k+1}^S |T_{kr}(m_0)|^{-2} \neq 0$ , 则说明虽然第  $k$  个读数头和第  $r$  个读数头的数据差值不包含  $m_0$  阶谐波, 但是在其余的读数头做差的数据中保留了  $m_0$  阶谐波信息, 即  $F[\delta_1](m_0) \neq 0$ , 所以加权平均得到的傅里叶变换  $F[\delta_1](m)$  包含  $m_0$  阶次谐波信息。

但是, 当  $T_{kr}(m_1) = 0$  时, 若  $\sum_{k=1}^S \sum_{r=k+1}^S |T_{kr}(m_1)|^{-2} = 0$ , 则  $F[\delta_1](m_1) = 0$ , 说明所有的读数头做差得到的数据, 全都不包含  $m_1$  阶谐波信息, 所以加权平均得到的傅里叶变换中  $F[\delta_1](m)$  不包含  $m_1$  阶次谐波信息。此原理利用最优化原则下的权重, 将多组读数头的结果综合在一起, 其最终的谐波残差阶次是每一组差值数据谐波残差的交集, 根据这一特点可以设计谐波残差较高的读数头排布方式。

### 2.2 现有方法布局原理分析

布局 1: EDA 布局<sup>[3]</sup>。等分平均法是一个典型的自标定方法, 将多个读数头均匀布置, 通过求平均的方式, 消除误差。当 6 个读数头采用均匀分布,  $N$  个采样点时, 计算其夹角  $|\beta_k - \beta_r|$  和残差阶次  $n$  (同上文  $m_e$ ), 如表 1 所示。

表 1 位置夹角与谐波残差阶数关系

Table 1 Relation between position angle and harmonic residual order

$ \beta_k - \beta_r $	组数	$n \left( n < \frac{N}{2}, n, k_0 \in \mathbb{Z} \right)$
$60^\circ$	5	$n = 6k_0$
$120^\circ$	4	$n = 3k_0$
$180^\circ$	3	$n = 2k_0$
$240^\circ$	2	$n = 1.5k_0$
$300^\circ$	4	$n = 1.2k_0$

由于采用方差最优原则进行求和, 并非全部的  $n$  阶谐波误差的信息未被提取, 而是其公有的谐波残差组成最终的残差。可以看出, 读数头的排布对此算法的影响较大。和 EDA 方法类似, 对于 6 个读数头均匀分布的情况, 6 的整数倍阶次谐波的误差信息均丢失。当  $n$  为 3 的倍数的时候, 排布间隔为  $120^\circ$  和  $240^\circ$  的 4 个方程的系

数  $T_{kr}(3k_0)$  为 0, 其余 11 个方程的系数并不为 0, 因此  $n = 3k_0$  的阶次误差被保留; 但是当  $n = 6k_0$  时, 15 个方程的系数  $T_{kr}(6)$  全部为 0, 因此  $n$  为 6 的整数倍阶次误差由于算法原理丢失了, 发生谐波抑制现象, 成为了谐波残差。

布局 2: 三读数头对径优化布局<sup>[17]</sup>。依据对径安装的原则, 采用  $0^\circ, 27^\circ, 144^\circ, 180^\circ, 207^\circ$  和  $324^\circ$ , 如图 2 所示。

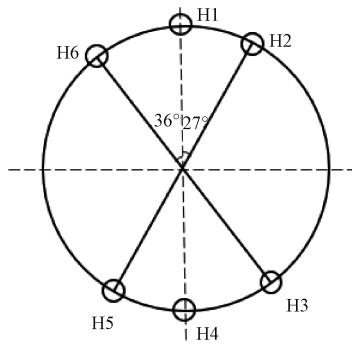


图 2 六读数头布局 2

Fig. 2 Layout 2 of six reading heads

考察其夹角和残差阶次可得其结果如表 2 所示。

表 2 位置夹角与谐波残差阶数关系

Table 2 Relation between position angle and harmonic residual order

$ \beta_k - \beta_r $	组数	$n \left( n < \frac{N}{2}, n, k_0 \in Z \right)$
$27^\circ$	2	$n = \frac{40}{3}k_0$
$36^\circ$	1	$n = 10k_0$
$63^\circ$	1	$n = \frac{40}{7}k_0$
$117^\circ$	2	$n = \frac{40}{13}k_0$
$144^\circ$	2	$n = 2.5k_0$
$153^\circ$	1	$n = \frac{40}{17}k_0$
$180^\circ$	3	$n = 2k_0$
$207^\circ$	1	$n = \frac{40}{23}k_0$
$297^\circ$	1	$n = \frac{40}{33}k_0$
$324^\circ$	1	$n = \frac{10}{9}k_0$

同理可以分析得到, 此种排布方式, 可以得到 10 种不同大小的夹角。整个布局谐波残差的公共阶次为 40, 因此谐波抑制现象发生在 40 的整数倍阶次谐波, 此种布局丢失的是 40 的倍数阶次的误差信息。

### 2.3 本文方法布局原理

在读数头夹角与谐波残差阶次的关系分析基础上, 提出残差阶次为 360 整数倍的多读数头布局方式。同时遵循两个原则:

1) 读数头尽可能均匀分布在圆光栅周围, 以削弱局部温度过高或电磁干扰较强等偶然因素的影响<sup>[18-19]</sup>。

2) 读数头夹角的种类尽可能多, 即充分地利用每一组差值数据。

当采用  $S$ (360 的因数)个读数头进行测量时, 取某个读数头记为基准读数头, 以基准读数头为参考, 第  $k+1$  个读数头的位置  $\beta_{k+1}$  应为:

$$\beta_{k+1} = \left[ \frac{360}{S} - (S-k) \right] \times k + a, \quad (k=1, 2, \dots, S-1) \quad (15)$$

其中, 当  $S$  为奇数时,  $a$  为 1;  $S$  为偶数时,  $a$  为 0。

以 6 个读数头排布为例, 基准读数头的为 H1, 读数头 H2、H3、H4、H5、和 H6 的夹角分别为  $55^\circ, 112^\circ, 171^\circ, 232^\circ$  和  $295^\circ$ 。记为布局 3。排布如图 3 所示。

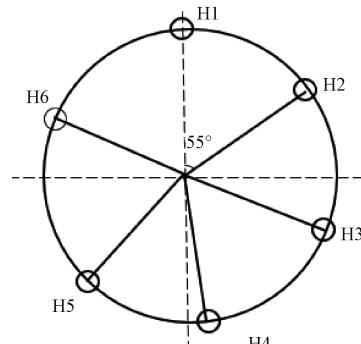


图 3 六读数头布局 3

Fig. 3 Layout 3 of six reading heads

在此读数头布局的基础上, 利用自标定原理算出系统误差, 其位置夹角与谐波残差阶数关系如表 3 所示。

由表 3 可以看出此布局方式, 若不考虑  $59^\circ$  夹角带来的影响, 那么整个布局残差的公共阶次为 120 的整数倍。由于  $59^\circ$  素数夹角的存在, 使得整个布局残差的公共阶次从 120 提升到 360 的整数倍, 因此, 此种布局方法的谐波残差阶次为 360 的整数倍。与此同时, 可以看出, 6 个读数头两两做差可以得到 15 种夹角, 最大程度地利用了测得的数据。

根据式(14)可得 2~6 个读数头位置夹角以及所含素数, 如表 4 所示。

表 3 位置夹角与谐波残差阶数关系

Table 3 Relation between position angle and harmonic residual order

$ \beta_k - \beta_r $	组数	$n \left( n < \frac{N}{2}, n, k_0 \in Z \right)$
55°	1	$n = \frac{72}{11}k_0$
57°	1	$n = \frac{120}{19}k_0$
59°	1	$n = \frac{360}{59}k_0$
61°	1	$n = \frac{40}{17}k_0$
63°	1	$n = \frac{40}{7}k_0$
112°	1	$n = \frac{45}{14}k_0$
116°	1	$n = \frac{90}{29}k_0$
120°	1	$n = \frac{1}{3}k_0$
124°	1	$n = \frac{90}{31}k_0$
171°	1	$n = \frac{40}{19}k_0$
177°	1	$n = \frac{120}{59}k_0$
183°	1	$n = \frac{120}{61}k_0$
232°	1	$n = \frac{45}{29}k_0$
240°	1	$n = \frac{2}{3}k_0$
295°	1	$n = \frac{72}{59}k_0$

表 4 不同个数的读数头位置

Table 4 Positions of different number of photoelectric sensors

个数	位置	素数夹角
2	0°、179°	179°
3	0°、119°、239°	239°
4	0°、77°、156°、237°	79°
5	0°、72°、145°、220°、297°	73°
6	0°、55°、112°、171°、232°、295°	59°

由表 4 可以看出, 读数头个数不同时, 此布局方法均可得到素数夹角, 因此得到的残差谐波阶次均为 360 整数倍。当利用该方法要求读数头夹角为整数时, 通过式(15)计算得出读数头个数的取值需为 360 的因数。

### 3 仿真实验

#### 3.1 六读数头仿真实验条件

仿真流程: 仿真部分采用 MATLAB 软件, 在已经建立误差模型的基础上, 根据误差模型得到角位移传感器基准读数头的全圆周系统误差, 通过相移关系得到不同角度间隔读数头的全圆周系统误差, 来模拟真实情况下实际测量数据的获取。

仿真模拟的真实的角位移传感器的参数为: 光栅外径为 260 mm, 内径为 210 mm; 偏心 4 μm, 偏心位置的初相位为 60°; 圆盘倾斜角度为 0.05°; 分度误差为 1 μm, 服从均匀分布和圆周封闭原则, 圆盘变形包括 3‰的二阶形变和 4‰的五阶形变。

根据上述条件生成基准读数头的 360 点系统误差图像, 其最值约为 8", 图像如图 4。偏心和圆盘倾斜产生的误差占低阶误差的绝大部分比重, 幅值大小为 6.2"; 由于刻线刻划不准确产生的分度误差是高阶误差的主要来源, 最值为 1.8"。

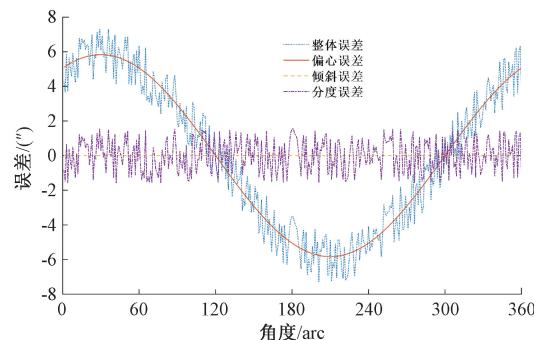


图 4 整体系统误差全圆周图像

Fig. 4 Whole circumference system error curve

其频谱如图 5 所示, 可以看出, 除占较大比重的一阶误差, 其它阶次的谐波耦合在一起幅值为 2.1", 无法确定某个阶次的谐波可以忽略。

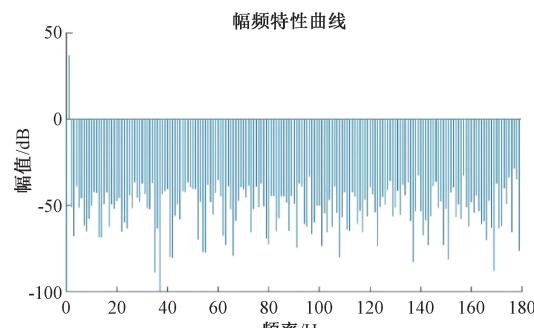


图 5 系统误差幅频曲线

Fig. 5 System error amplitude frequency curve

### 3.2 仿真实验

仿真实验采用六读数头,选取一个读数头为基准读数头,位置记为 $0^\circ$ ,其余5个读数头分别按照 $55^\circ$ 、 $112^\circ$ 、 $171^\circ$ 、 $232^\circ$ 和 $295^\circ$ 顺时针进行布置,同2.3节一致记为布局3。根据读数头的夹角可以得到其相位关系,进而得到该读数头的系统误差图像。6个读数头所测数据中系统误差图像如图6所示。

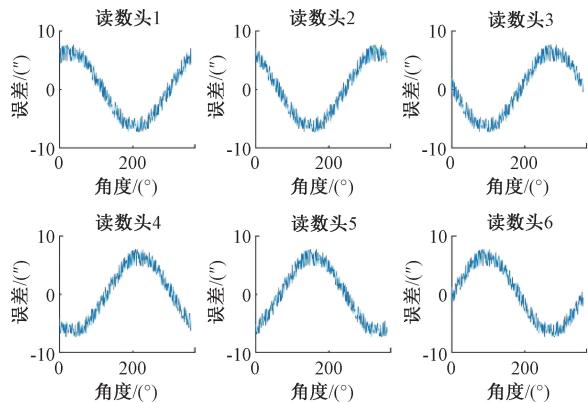


图6 布局3-六读数头系统误差图像

Fig. 6 Layout 3-six reading heads system error curve

实际实验中,真值与误差是耦合在一起且无法区分的<sup>[20-21]</sup>,可以通过数据两两做差抵消真值,得到误差的差值。将得到的这6组仿真数据进行两两做差,此步骤是模拟抵消真值的过程,之后带入自标定流程中进行计算,得到通过自标定原理解算得到的系统误差,如图7所示。

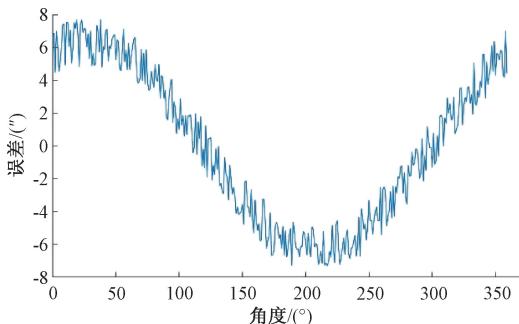


图7 布局3-解算出的系统误差曲线

Fig. 7 Layout 3-calculated system error curve

将仿真设定的系统误差与解算得到的系统误差进行做差比较,得到此种排布下实验的残差如图8所示。

可以发现此种布局方式得到的谐波残差为 $3 \times 10^{-13}''$ ,视为将360点采样信息中所包含的系统误差全部解算出来。证明此种自标定原理下,布局方案的有效性。

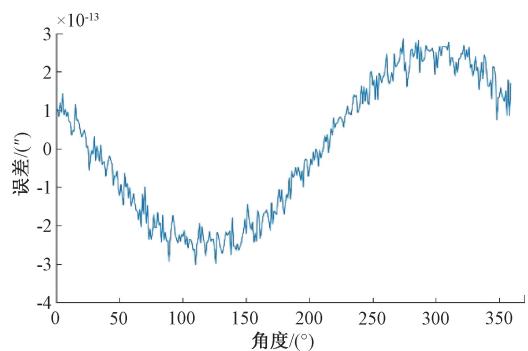


图8 布局3-全圆周残差图像

Fig. 8 Layout 3-full circle residual curve

### 3.3 仿真对比实验

利用3.1节仿真实验原理,采用六读数头,考察其它布局方式效果。

EDA将读数头按照 $0^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $120^\circ$ 、 $180^\circ$ 、 $240^\circ$ 和 $300^\circ$ 均匀布置<sup>[3]</sup>,记为布局1。

三读数头对径优化布局采用 $0^\circ$ 、 $27^\circ$ 、 $144^\circ$ 、 $180^\circ$ 、 $207^\circ$ 和 $324^\circ$ 排布<sup>[17]</sup>,记为布局2。

利用布局1的方式解算测量系统误差,所得结果与原始误差比较,得到其残差图像如图9(a)所示。布局2的方式得到其残差图像如图9(b)所示,其残差幅值最值为 $0.31''$ ,且成周期性变化。

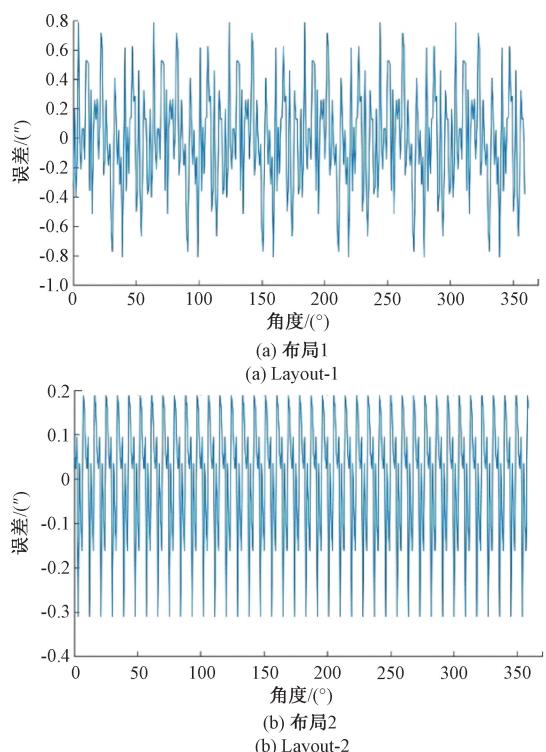


图9 全圆周残差

Fig. 9 Full circle residual error curve

布局 1 的残差频谱如图 10(a) 所示。可以看出通过六读数头分布和方式得到的误差残差最大值为  $0.8''$ 。这种布局方式下利用 EDA 方法和传递函数结果等效, 得到的残差阶次是 6 的整数倍。布局 2 的观察期频谱通过图 10(b) 可以发现: 此种布局方式解算出的系统误差谐波残差阶次是 40 的整数倍。

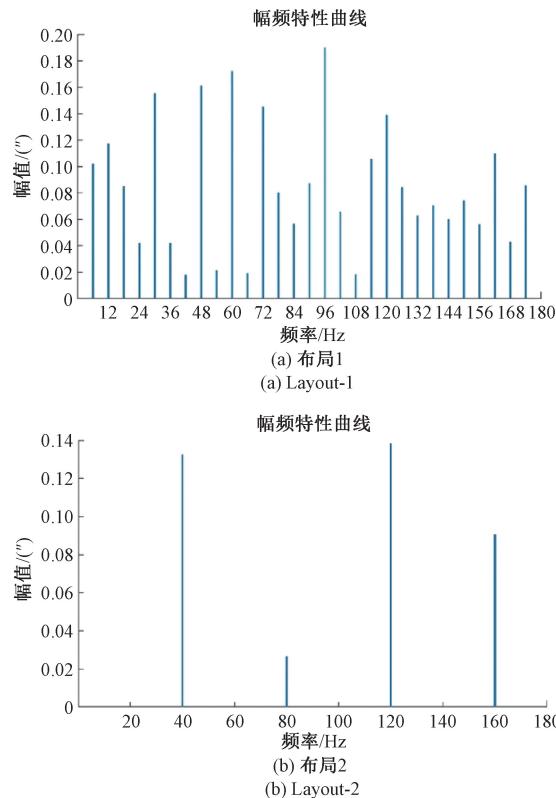


图 10 全圆周残差幅频特性图像

Fig. 10 Full circle residual error amplitude frequency curve

对于六读数头布置而言, 对比测量结果, 可得表 5。

表 5 不同布局方式结果对比

Table 5 Comparison of results of different layout methods

布局方式	自标定原理	残差幅值( $''$ )	残差阶次
布局 1 <sup>[3]</sup>	等分平均/传递函数法	0.8	6 的整数倍
布局 2 <sup>[17]</sup>	传递函数法	0.2	40 的整数倍
布局 3	传递函数法	$3 \times 10^{-13}$	360 的整数倍

布局 1 是采用 EDA 均匀布置, 对于 EDA 算法而言, 其原理主要是利用平均原理来通过相加来抵消掉测量误差中的奇偶项, 故 EDA 算法一个重要的安装原则就是对称安装。但是基于传递函数法的自标定原理下的均匀安装会导致信息损失。

由 2.1 节的表 2 及分析可知, 布局 2 的传递函数法的谐波残差的公共阶次为 40, 故在 40 的整倍数阶次发生

谐波抑制现象。

同时对于布局 3, 该方法的谐波残差阶次为 360 的整数倍, 由采样定理可知, 对一个周期内进行 360 点采样便足以描述 180 阶次以下的谐波, 因此布局 1 可以将其全部解算出来从而实现残差极小。

随着自标定精度要求不断提高, 采样点数的提高同样是必要的。仿真实验可以看出在采样点数较高的情况下, 布局 3 最能满足测量需要。当采样点数较少的情况下, 布局 3 和布局 2 可以得到同样的效果。而且可以发现对于读数头均分布而言, 传递函数法和等分平均法等效。

## 4 验证实验

### 4.1 六读数头自标定实验

基于仿真实验原理, 六读数头自标定实验采取本文方法(布局 3)的布局方式, 即以一个基准读数头为  $0^\circ$ , 其余分别以  $55^\circ$ 、 $112^\circ$ 、 $171^\circ$ 、 $232^\circ$  和  $295^\circ$  顺时针布局。实验布置包含 4 个部分, 分别为圆光栅和六读数头组成的角度位移传感器、机械结构、数据采集模块和数据处理模块。实验装置如图 11 所示。角度位移传感器采用的是雷尼绍公司 RESOLUTE 绝对光栅尺及配套的读数头, 圆光栅系统精度为  $\pm 0.68''$ 。

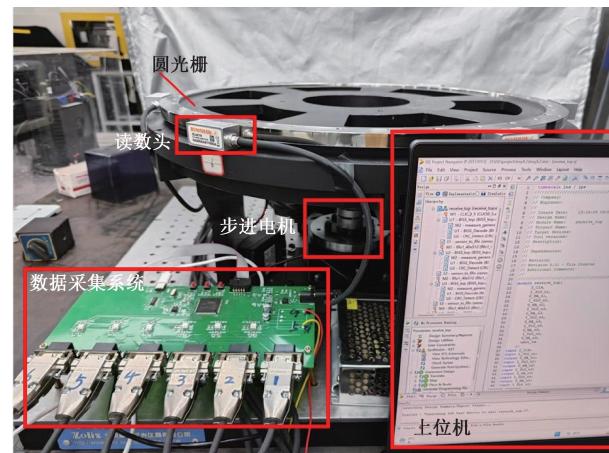


图 11 自标定实验系统

Fig. 11 Self-calibration experimental system

借助长度计分别对实验装置圆光栅进行偏心和倾斜测量, 长度计精度为  $\pm 0.2 \mu\text{m}$ , 经过电子细分后可以得到  $\pm 0.05 \mu\text{m}$ 。以圆光栅绝对零点为起始点, 长度计归零, 测得取平均值如图 12 所示。

测得偏心为  $14.29 \mu\text{m}$ , 此时圆光栅偏心误差引入的一阶谐波  $13.11''$ 。测得倾斜图像中 Y 轴最大差值为  $117 \mu\text{m}$ , 圆光栅的倾斜为  $57.86''$ , 此时引入的二阶谐波误差幅值约为  $0.02''$ 。

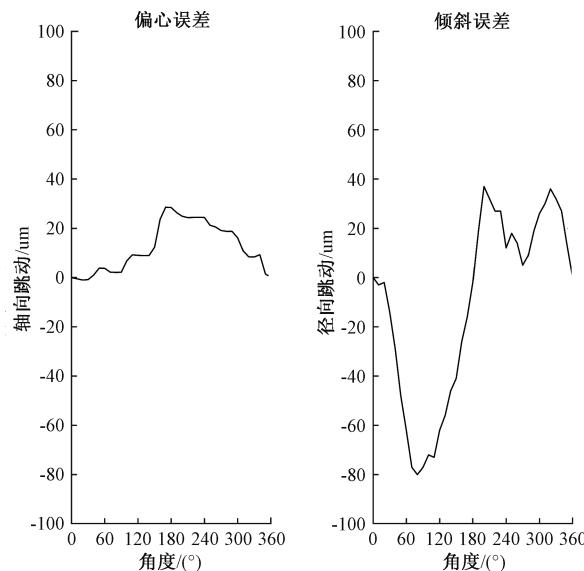


图 12 偏心与倾斜误差曲线

Fig. 12 Eccentricity and tilt error measurement experiments

实验前对读数头的稳定性进行测量实验,保持圆光栅静止不动,同时驱动 6 个读数头进行角度测量,连续采集 360 次。以这 6 个读数头各自采集到的第一个数为基准,来求取差值分析 6 个读数头的零漂情况。分别测试了 3 次,其中一次的数据如图 13 所示。

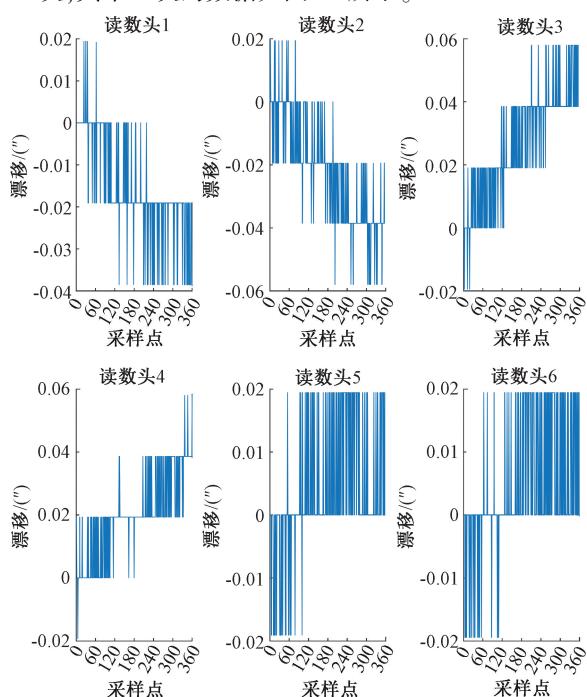


图 13 六读数头稳定性测试实验

Fig. 13 Six reading heads stability result curve

从图像中可以观察到,零漂测量值共包含 7 个主要数值: 0、0.019''、0.038''、0.057''、-0.019''、-0.038'' 和

-0.057'',这些数值之间的差异均为 0.019'' 的倍数。由于该读数头具有 26 位分辨率,故其理论分辨率为 0.019''. 因此,读数头的零漂范围为  $\pm 0.057''$ ,即  $\pm 3$  LSB,这一精度足以支持自标定实验。

对读数头采用布局 3 的安装相对位置进行多次测量取平均值,结果如表 6 所示。

表 6 六读数头相对位置测量结果

Table 6 Measurement results of relative position of six reading heads

读数头序号	位置	与理想位置差异
1	0°	0°
2	54.96°	-155''
3	112.02°	91''
4	170.93°	-245''
5	231.95°	-180''
6	294.99°	-27''

通过仿真进行估值,由于该读数头安装误差的存在引起的最终残差的数量级在 1'' 以下。

将角度增量作为自标定流程的输入,故采取全圆周 6 个读数头 360 采样点。具体流程为:

对于绝对位置数列  $f(x)$ ,其第 1 个起始位置记为  $f(1)$ ,角度增量数列记为  $g(x)$ 。首先需要确定圆光栅的旋转方向是正向还是反向。根据旋转方向的不同,需要计算当前位置与起始位置之间的角度差值。如果角度经过绝对零点,增量值可能会变为负数,此时需对负数增量进行修正加上 360°。

设计全圆周 360 点采样,理论上每个绝对位置角度值之间的差值应当是 1°。图 14 是多次实验选取一组正转采样得出的采样不均匀误差。

从图中可以看出采样间隔误差最大不超过 0.02° 即 72'',根据仿真结果,当采样误差达到 1'' 数量级时,最终残差的数量级降至 0.001''. 由此推断,如果实验中的采样间隔误差不超过 100'' 的数量级,则残差的预期影响将不超过 0.1'' 的数量级也就是亚角秒级别。

将 6 个读数头采样得到的数据经过预处理得到的 6 组 360 个增量信息带入自标定流程中进行计算,得到解算出的系统误差。6 个读数头正转进行一次自标定流程计算得到的系统误差如图 15 所示。为了能够统一进行比较观察,需将解算得到的系统误差统一相移到以绝对零点为基准的初始相位。

对于反转而言,其解算出来的系统误差与正转相比存在着符号相反的关系,反转相移后的系统误差与正转相移后的系统误差在图像上关于  $(180^\circ, 0)$  中心对称,这是由于圆光栅自身性质所决定的。

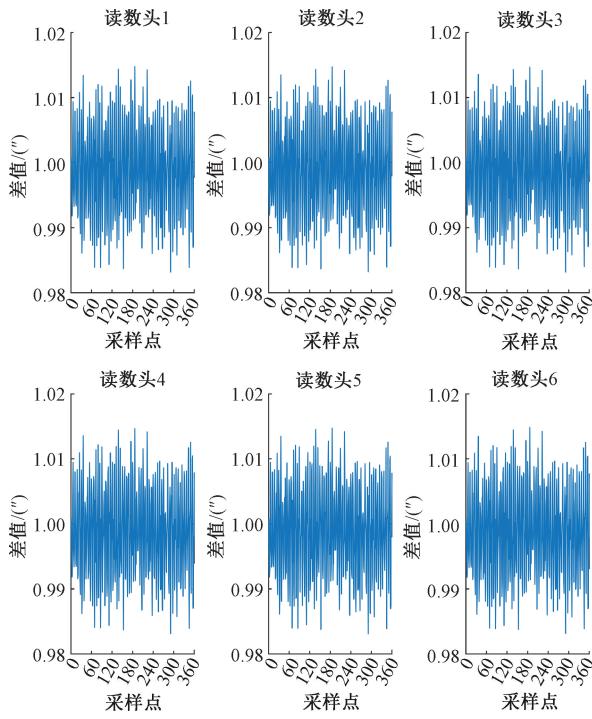


图 14 采样不均匀误差

Fig. 14 Sampling non-uniform error curve

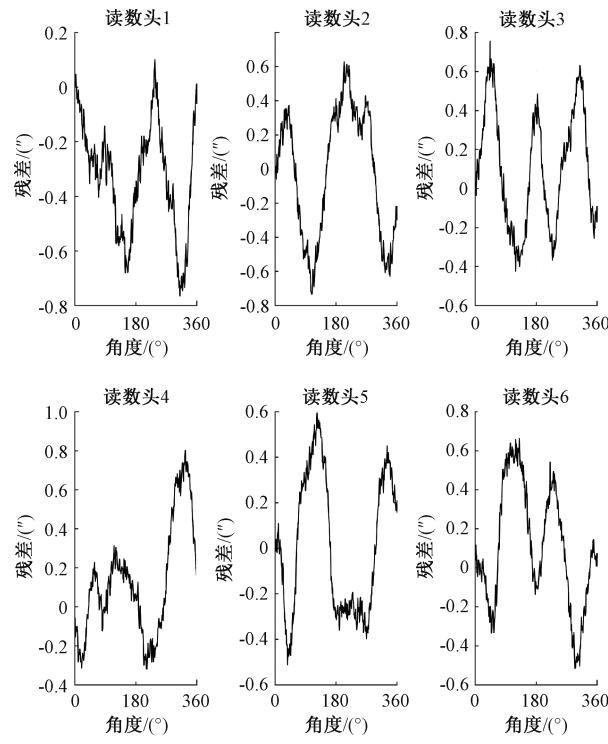


图 16 6个读数头残差图

Fig. 16 Six reading heads residual error curve

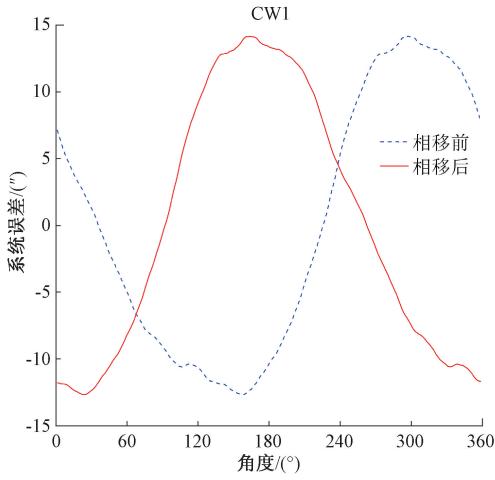


图 15 单次自标定系统误差

Fig. 15 Single self-calibration system error curve

#### 4.2 六读数头自标定实验评价

通过考察测得值的补偿值来评价单次自标定的效果, 补偿值由真值和随机误差构成。经过补偿后, 六读数头的角度信息可以通过对增量信息求均值来消除随机误差。最终结果可作为实验真值, 从而评估六读数头的标定情况。通过分析六读数头与真值之间的差异对自标定实验的结果进行评价。图 16 是单次自标定后 6 个读数头的残差图像, 即为读数头补偿值和实验真值的差值。

考察单次自标定补偿结果, 对 6 个读数头进行分析, 如表 7 所示。

表 7 六读数头残差信息

Table 7 Information of six reading residual error

读数头编号	残差最值	峰峰值	标准差
读数头 1	0.75	0.85	0.20
读数头 2	0.75	1.35	0.40
读数头 3	0.75	1.20	0.30
读数头 4	0.80	1.10	0.30
读数头 5	0.60	1.10	0.30
读数头 6	0.65	1.20	0.30

由于读数头的理论分辨率为  $0.019''$ , 故将补偿后残差值统一保留至  $0.05''$  有效位数。在补偿结果中可以看出在 6 个读数头中残差的绝对值的最大值为  $0.8''$ , 未补偿前系统误差最值为  $14.2''$ , 残差最值占未补偿前误差最值的  $5.63\%$ , 说明此次自标定实验消除  $94.37\%$  的圆光栅测角系统的误差。

进行 2 组正转和 2 组反转测得结果带入自标定流程中进行计算, 反转结算得到的系统误差取反, 均进行相移到绝对零点处理, 得到 4 组系统误差数据, 如图 17 所示。

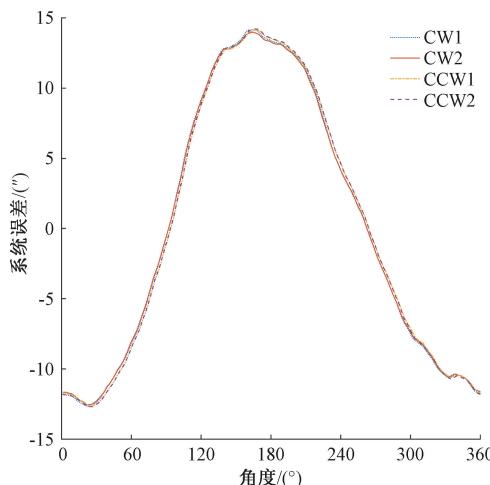


图 17 系统误差

Fig. 17 Self-calibration system error curve

从图像的形状和重合度来看,可以证明得到的实验结果一致性较好。

## 5 结 论

本文提出了一种残差谐波阶次为 360 整数倍的多读数头布置方式并进行仿真验证。仿真实验结果显示,对于 360 点采样的数据,本文提出的布局的残差为  $3 \times 10^{-13}$ ;仿真实验结果证明:本文提出的布局方式谐波残差阶次更高,在采样点数较高的情况下可以更加准确地解算出测角误差,对于测量精度进一步提高效果明显。本文通过搭建六读数头自标定实验,得到结果为此次自标定实验消除 94.37% 的圆光栅测角系统的误差,实现了圆光栅测角系统的全圆周标定,验证了本文提出的布局方式在实际应用中的有效性。

本标定方法在克服了测量量程小和缺乏更高参考基准的问题的基础上,可以计算出更高谐波阶次的误差,在高采样点数下的多读数头角位移传感器上具有良好的应用发展前景。

## 参考文献

- [1] 张文颖,劳达宝,周维虎,等.圆光栅测角传感器在线自校准系统研制与实验[J].红外与激光工程,2018,47(1): 224-229.  
ZHANG W Y, LAO D B, ZHOU W H, et al. Development and experiment of online self-calibration system for circular grating angle sensor[J]. Infrared and Laser Engineering, 2018, 47(1): 224-229.
- [2] 张文颖,劳达宝,周维虎,等.多读数头混合布局测角误差抑制方法[J].光学精密工程,2017,25(9): 2339-2346.  
ZHANG W Y, LAO D B, ZHOU W H, et al. Suppression method for angle measurement error of mixing-layout multiple reading head [J]. Optics and Precision Engineering, 2017, 25(9): 2339-2346.
- [3] PROBST R, WITTEKOPF R, KRAUSE M, et al. The new PTB angle comparator[J]. Measurement Science & Technology, 1998, 9(7): 1059-1066.
- [4] JIAO Y, DONG Z G, DING Y, et al. Optimal arrangements of scanning heads for self-calibration of angle encoders[J]. Measurement Science and Technology, 2017, 28(10): 105013.
- [5] 任曦,杜升平,陈科,等.圆光栅编码器测角误差源及频谱分析[J].激光与光电子学进展,2020,57(17): 171-178.  
REN X, DU SH P, CHEN K, et al. Error source and spectrum analysis for angle measurement for circular grating encoder[J]. Laser and Optoelectronics Progress, 2020, 57(17): 171-178.
- [6] 杨禹,朱进,邹伟.用于角度编码器自动校准装夹系统的研制[J].计量科学与技术,2022,66(8): 42-45,49.  
YANG Y, ZHU J, ZOU W. Development of clamping system for automatic calibration of angle encoder [J]. Metrology Science and Technology, 2022, 66(8): 42-45, 49.
- [7] 黄垚,薛梓,吴金杰,等.新一代线角度基准装置的研制[J].计量科学与技术,2024,68(2): 3-9.  
HUANG Y, XUE Z, WU J J, et al. The development of new primary standard for positional angles[J]. Metrology Science and Technology, 2024, 68(2): 3-9.
- [8] 李尕丽,薛梓,黄垚,等.全圆连续角度标准装置的系统误差分离与补偿[J].仪器仪表学报,2021,42(3): 1-9.  
LI G L, XUE Z, HUANG Y, et al. System error separation and compensation of the continuous full circle angle standard device[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2021, 42(3): 1-9.
- [9] GECKELER R D, LINK A, KRAUSE M, et al. Capabilities and limitations of the self-calibration of angle encoders [J]. Measurement Science and Technology, 2014, 25(5): 055003.
- [10] GECKELER D R, FRICKE A, ELSTER C. Calibration of angle encoders using transfer functions[J]. Measurement Science and Technology, 2006, 17(10): 2811-2818.
- [11] 周彬彬.高精度圆光栅测角系统误差补偿技术研究[D].哈尔滨:哈尔滨工业大学,2016.  
ZHOU B B. Research on error compensation technology

- for high accuracy circle gratings angle-measuring system[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2016.
- [12] 苏东风. 高精度标定转台光栅测角系统关键技术研究[D]. 长春:中国科学院研究生院(长春光学精密机械与物理研究所), 2011.
- SU D F. Study of key techniques on high precision calibration turntable grating angle measuring system[D]. Changchun: Chinese Academy of Science (Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Science, China), 2011.
- [13] 李尕丽,薛梓,黄垚,等. 圆光栅测角系统示值误差分析与补偿[J]. 仪器仪表学报, 2021, 42(5): 59-65.
- LI G L, XUE Z, HUANG Y, et al. Indication error analysis and compensation of circular grating angle measurement system [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2021, 42(5): 59-65.
- [14] 李忠明,李俊霖,韩冰,等. 圆光栅测角误差补偿方法[J]. 仪表技术与传感器, 2021, 465(10): 56-59, 89.
- LI ZH M, LI J L, HAN B, et al. Compensation method of circular grating angle measurement error[J]. Instrument Technique and Sensor, 2021, 465(10): 56-59, 89.
- [15] 宋宇飞,毛庆洲,周昊,等. 圆光栅角度传感器偏心误差的分析与补偿[J]. 仪器仪表学报, 2022, 43(12): 76-86.
- SONG Y F, MAO Q ZH, ZHOU H, et al. Analysis and compensation of the eccentricity error of circular grating angle sensors[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2022, 43(12): 76-86.
- [16] TAGNE S C T, VISSIERE A, DAMAK M, et al. An advanced Fourier-based separation method for spindle error motion identification [J]. Precision Engineering, 2022, 74: 334-346.
- [17] 张润. 提高便携关节式坐标测量机测角精度的圆光栅自标定技术研究[D]. 合肥:合肥工业大学, 2020.
- ZHANG R. Research on self-calibration of circular grating to improve the angle measurement precision of the portable articulated coordinate measuring machines [D]. Hefei: Hefei University of Technology, 2020.
- [18] 户璐卿. 光栅读数头微动效应研究[D]. 洛阳:河南科技大学, 2019.
- LU L Q. Research on micro-motion effect of grating read-head [D]. Luoyang: Henan University of Science and Technology, 2019.
- [19] 马瑞翔,朱维斌,朱进,等. 基于傅里叶变换的转台分度误差分离与补偿方法[J]. 仪器仪表学报, 2023, 44(4): 140-150.
- MA R X, ZHU W B, ZHU J, et al. Separation and compensation method for indexing error of rotary table based on Fourier transformation [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2023, 44(4): 140-150.
- [20] 张文颖,朱浩然. 圆光栅测角系统误差分析与修正[J]. 应用光学, 2019, 40(3): 399-403.
- ZHANG W Y, ZHU H R. Error analysis and correction of circular grating angle measurement system [J]. Journal of Applied Optics, 2019, 40(3): 399-403.
- [21] 白冰,朱维斌,黄垚,等. 偏心偏斜对转台圆光栅莫尔信号的影响研究[J]. 电子测量与仪器学报, 2022, 36(1): 1-10.
- BAI B, ZHU W B, HUANG Y, et al. Research on the effect of eccentricity and inclination on the Moiré signal of turntable [J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2022, 36(1): 1-10.

### 作者简介



**池烽**,2023年于天津大学获得工学学士学位,现为天津大学精密仪器与光电子工程学院在读硕士研究生,主要研究方向为超高精度角位移传感器。

E-mail: cf195578523@126.com

**Chi Feng** received his B.Sc. degree in from Tianjin University 2023, he is currently pursuing a master's degree in School of Precision Instrument and Opto-Electronics Engineering of Tianjin University. His main research interest includes high precision angular displacement sensor.



**黄银国**(通信作者),2009年于天津大学获得博士学位,现为天津大学副教授,主要研究方向为磁传感技术、瞄准与定位技术。

E-mail: hyg@tju.edu.cn

**Huang Yingguo** (Corresponding author) received his Ph. D. degree from Tianjin University in 2009. Now he is associate professor in Tianjin University. His main research interests include Magnetic sensing technology, aiming and positioning technology.