

DOI: 10.19650/j.cnki.cjsi.J2615149

面向异步相对观测导航系统的 C-SCKF 算法研究*

薛博文, 朱茂然, 韩佳乐, 张弘宇, 武元新

(上海交通大学自动化与感知学院 上海 200240)

摘 要: 随机克隆卡尔曼滤波 (SCKF) 考虑了与相对观测相关的历史参考状态的不确定性, 相比扩展卡尔曼滤波 (EKF) 在处理相对观测中表现出较高的精度, 广泛应用于移动机器人和无人机 (UAV) 的状态估计等场景中。然而随着相机和激光雷达 (LiDAR) 等相对观测类型传感器数量的增多, SCKF 中状态及协方差矩阵的维数显著增加。而矩阵求逆等运算的数据量相对于矩阵维数呈三次方增长, 导致传统算法的计算复杂度大幅上升, 这限制了 SCKF 算法在嵌入式系统中的应用。为此, 提出一种改进的 Consider 随机克隆卡尔曼滤波 (C-SCKF) 算法, 旨在实现多个相对观测场景下的状态高效降维与准确估计。该算法通过引入状态降维策略和 Consider 卡尔曼滤波 (CKF) 的误差更新方式, 仅考虑克隆部分状态的不确定程度而不直接进行状态估计, 将状态估计维数从原本随着相对观测传感器数量增加的 $15(N+1)$ 维降低至固定的 15 维。不同于现有方法仅考虑一种相对观测, 本研究推导了更为通用的 SCKF 表达形式, 可以处理多种异步相对观测, 并对比了 N 种相对观测情况下 EKF、SCKF 和 C-SCKF 的算法复杂度。数值仿真和实测实验结果表明, 在保证多源导航精度与传统 SCKF 算法相当的前提下, C-SCKF 算法的计算速度比传统 SCKF 提升了约 5 倍。该算法有效缓解了高维矩阵运算带来的计算量问题, 更适合部署于算力及功耗资源严格受限的车载或航载嵌入式设备中。

关键词: 随机克隆卡尔曼滤波; consider 卡尔曼滤波; 惯性基导航

中图分类号: TH701 文献标识码: A 国家标准学科分类代码: 510.40

Consider stochastic cloning Kalman filter for navigation systems with asynchronous relative observations

Xue Bowen, Zhu Maoran, Han Jiale, Zhang Hongyu, Wu Yuanxin

(School of Automation and Intelligent Sensing, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: The stochastic cloning Kalman filter (SCKF) accounts for the uncertainty of historical reference states related to relative observations. Compared with the extended kalman filter (EKF), SCKF demonstrates higher accuracy in processing relative observations and is widely applied in scenarios such as state estimation for mobile robots and unmanned aerial vehicle (UAV). However, as the number of relative observation sensors N (such as camera and LiDAR) increases, the dimensions of the state vector and covariance matrix in SCKF expand significantly. Since the computational load of operations like matrix inversion increases cubically with the matrix dimension, the computational complexity of the traditional algorithm rises drastically, which severely limits the application of the SCKF algorithm in embedded systems. To address this issue, this article proposes an improved Consider stochastic cloning Kalman filter (C-SCKF) algorithm, aiming to achieve efficient state dimensionality reduction and accurate estimation in scenarios with multiple relative observations. By introducing a state dimensionality reduction strategy and incorporating the error update mechanism of the consider Kalman filter (CKF), the proposed algorithm merely considers the uncertainty levels of the cloned states without directly estimating them. Consequently, the dimension of the state estimation is successfully reduced from $15(N+1)$, which originally scales with the number of relative observation sensors, to a fixed dimension of 15. Distinct from existing methods that only account for a single type of relative observation, this article derives a more generalized expression for SCKF capable of handling multiple asynchronous relative observations. Furthermore, the algorithmic complexities of EKF, SCKF, and C-SCKF are analyzed and compared under the condition of

收稿日期: 2026-04-15 Received Date: 2026-04-15

* 基金项目: 国家自然科学基金 (62273228)、国家自然科学基金 (62403315) 项目资助

N types of relative observations. Numerical simulations and real-world experimental results demonstrate that, while maintaining a multi-source navigation accuracy comparable to that of the traditional SCKF algorithm, the computational speed of the C-SCKF algorithm is improved by approximately five times. The proposed algorithm effectively alleviates the computational burden caused by high-dimensional matrix operations and is more suitable for deployment on vehicle-mounted or airborne embedded devices with strict constraints computing power and power consumption.

Keywords: stochastic cloning Kalman filter; consider Kalman filter; inertial-based navigation

0 引言

导航定位技术在自动驾驶^[1-2]、无人机^[3]、移动机器人^[4]及人体运动跟踪^[5]等领域有着越来越广泛的应用。然而,导航系统中使用单一传感器经常会遇到很多限制。惯性导航系统(inertial navigation system, INS)的误差会随时间累积,导致轨迹发散;全球导航卫星系统(global navigation satellite system, GNSS)易受多径效应和信号遮挡影响,尤其在城市峡谷或室内场景中,可能出现信号质量下降甚至完全不可用的情况;视觉导航虽能获取丰富的环境信息,但对光照条件和表面纹理高度敏感,在弱纹理或光照不足的场景中可能失效。为解决上述问题,惯性基组合导航系统通过融合异构传感器的数据,利用不同传感器的互补特性,实现更精确鲁棒的导航定位。

目前惯性基组合导航系统状态估计方法主要分为优化和滤波两类^[6]。基于优化的方法利用区间内的测量信息,在最大后验准则下通过非线性迭代得到最优估计结果^[7-10]。为减少惯性测量单元(inertial measurement unit, IMU)高频采样带来的计算负担,基于优化的方法通常采用预积分,将惯导积分得到的相对位姿作为伪观测^[11]。例如,Cao等^[12]在预积分框架下,通过非线性优化融合GNSS、视觉和惯性传感器数据,有效抑制了视觉-惯性里程计的漂移,提升了复杂室内外环境下的定位性能。Nguyen等^[13]通过滑动窗口估计无人机的状态,实现了自动校准超宽带锚点的位置,提高了系统的灵活性和适应性。尽管基于优化的方法精度较高,但其迭代计算过程通常计算量较大,效率较低。

滤波的方法基于马尔可夫假设,即当前状态仅依赖于上一时刻的状态,通常比优化方法具有更高的计算效率,这一特点使得其广泛应用在资源有限的嵌入式平台上。扩展卡尔曼滤波(extended Kalman filter, EKF)作为应用最为广泛的滤波方法,通过状态传播和观测更新两个步骤得到当前估计结果^[14]。当系统存在相对观测时,当前观测不仅与当前状态相关,还依赖于过去状态。EKF未考虑过去状态的不确定性,容易出现估计不一致问题^[15-16]。

为克服EKF在处理相对观测时的局限性,Mourikis等^[17-18]提出了随机克隆卡尔曼滤波(stochastic cloning

Kalman filter, SCKF),该方法通过考虑与相对观测相关的历史参考状态的不确定性来解决这一问题。具体来说,SCKF将当前观测所关联的历史状态克隆并增广到状态向量中,在观测更新时,同时估计与相对观测关联的历史/当前导航状态及其协方差,从而实现相对观测的准确处理。在此基础上,Lynen等^[19-20]和将SCKF扩展至同时考虑相对观测和绝对观测,验证了其在室内外微型无人机(micro aerial vehicle, MAV)定位中的有效性。Enter等^[21-22]提出了平滑SCKF算法,通过反向传播进一步优化滤波估计,提升了估计精度。Amirhosseini等^[23]提出了基于Sigma点的克隆滤波方法,在低光照室内条件下取得了相较SCKF更好的效果。此外,Mourikis等^[24]提出的多状态约束卡尔曼滤波(multi-state constraint Kalman filter, MSCKF)将多个历史状态加入状态向量,用于处理同一个图像特征点与多个时刻状态相关的场景。由于MSCKF估计状态中要维护多个时刻导航状态,计算复杂度相对SCKF更高。

近年来,研究人员致力于降低SCKF的计算复杂度。Mina等^[25]证明了SCKF可通过延迟状态滤波(delayed-state Kalman filter, DSKF)等效实现,计算效率提升约4倍。然而,该等效性仅适用于单一类型的相对观测。目前,如何在存在多种异步绝对观测和相对观测的情况下降低滤波算法的复杂度,仍是一个开放性问题。

Consider 卡尔曼滤波(consider Kalman filter, CKF)^[26-27]通过将部分常量参数从状态向量中移除,同时考虑这些常量的不确定性,提高状态估计的计算效率。该方法应用于航天器姿态估计^[28-29]等计算资源有限的场景。受CKF启发,本文采用类似策略来降低SCKF中状态增广带来的计算负担。具体而言,通过仅考虑克隆状态的不确定性而不对其进行更新,可以在保持估计一致性的同时降低计算复杂度。此外,仅克隆与相对观测直接相关的状态,可以进一步降低待估计参数的维度,提升计算效率^[24]。

本文的主要贡献包括以下3个方面:1)提出一种Consider随机克隆卡尔曼滤波(C-SCKF)算法。该算法通过状态降维策略和基于Consider卡尔曼滤波的更新方案,将状态估计维数从 $15(N+1)$ 降低至15;2)不同于现有方法仅考虑一种相对观测,本文推导了更为通用的SCKF表达形式,可以处理多种异步相对观测;3)推导了

C-SCKF 的计算复杂度,与 SCKF 进行对比分析。数值仿真和实测实验表明,C-SCKF 的计算速度约为传统 SCKF 的五倍,且估计精度无明显下降。这使得其适用于计算资源有限的嵌入式设备中。

1 基于 SCKF 的惯性基导航

1.1 有相对观测的惯性基导航

地心地固坐标系(记作 e 系)下的惯性导航运动学方程为:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{C}}_b^e = \mathbf{C}_b^e (\mathbf{w}_{eb}^e \times) \\ \dot{\mathbf{v}}_{eb}^e = \mathbf{C}_b^e (\mathbf{f}_{ib}^b - \mathbf{b}_a - \mathbf{n}_a) - 2\mathbf{w}_{ie}^e \times \mathbf{v}_{eb}^e + \mathbf{g}^e \\ \dot{\mathbf{p}}_{eb}^e = \mathbf{v}_{eb}^e \\ \dot{\mathbf{w}}_{eb}^b = \mathbf{w}_{ib}^b - \mathbf{b}_g - \mathbf{C}_e^b \mathbf{w}_{ie}^e - \mathbf{n}_g \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{C}_b^e$ 表示 IMU 载体坐标系(b 系)相对于 e 系的旋转矩阵, $\mathbf{w}_{eb}^e$ 是 b 系相对于 e 系的角速度在 e 系下的投影,定义反对称矩阵($\cdot \times$),对于任意两个三维向量 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$,满足 $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (\mathbf{x} \times) \mathbf{y}$ 。 $\mathbf{p}_{eb}^e$, $\mathbf{v}_{eb}^e$ 分别表示载体在 e 系下的位置和速度。 $\mathbf{f}_{ib}^b$ 表示加速度计测量的比力, $\mathbf{w}_{ib}^b$ 是通过陀螺仪测量得到的角速度。 $\mathbf{w}_{ie}^e$ 是地球自转角速度在 e 系下的投影。 $\mathbf{g}^e$ 表示重力向量在 e 系下的投影, $\mathbf{n}_a$ 和 $\mathbf{n}_g$ 表示加速度计和陀螺仪的测量噪声,均为零均值的高斯白噪声,协方差分别是 $\sigma_a^2 \mathbf{I}_3$ 和 $\sigma_g^2 \mathbf{I}_3$ 。 $\mathbf{b}_a$, $\mathbf{b}_g$ 分别表示加速度计和陀螺仪的零偏,建模为随机游走:

$$\dot{\mathbf{b}}_a = \mathbf{n}_{ba} \quad (2)$$

$$\dot{\mathbf{b}}_g = \mathbf{n}_{bg} \quad (3)$$

其中, $\mathbf{n}_{ba}$ 和 $\mathbf{n}_{bg}$ 分别表示零均值高斯白噪声,协方差为 $\sigma_{ba}^2 \mathbf{I}_3$ 和 $\sigma_{bg}^2 \mathbf{I}_3$ 。 e 系下的姿态速度以及位置可以通过积分式(1)获得^[30]。惯性基导航系统在时间 t_k 的估计状态定义为:

$$\mathbf{x}_{k|k} : \mathbf{C}_b^e \mathbf{p}_{eb}^e, \mathbf{v}_{eb}^e, \mathbf{b}_a, \mathbf{b}_g \quad (4)$$

其中,下标 $l|j$ 表示当前在 t_l 时刻,外部观测更新到 t_j 时刻。对应时间 t_k 的误差状态 $\delta \mathbf{x}$ 定义为估计的状态 $\hat{\mathbf{x}}$ 减去真实的状态 $\mathbf{x}$,即 $\delta \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ 。特别地,姿态的状态误差定义为:

$$\mathbf{C}_e^{bT} \hat{\mathbf{C}}_e^b = \mathbf{I}_3 + \delta \boldsymbol{\psi}_{be}^e \times \quad (5)$$

其中, $\delta \boldsymbol{\psi}_{be}^e$ 表示 e 系相对 b 系的欧拉角误差在 e 系下的投影。 t_k 时刻误差状态卡尔曼滤波的估计状态定义为:

$$\delta \mathbf{x}_{k|k} = [\delta \boldsymbol{\psi}_{be}^{eT}, \delta \mathbf{p}_{eb}^{eT}, \delta \mathbf{v}_{eb}^{eT}, \delta \mathbf{b}_g^T, \delta \mathbf{b}_a^T]^T \quad (6)$$

其中, $\delta \mathbf{p}_{eb}^e$, $\delta \mathbf{v}_{eb}^e$ 表示载体在 e 系下的位置和速度误差。 t_k 到 t_{k+1} 离散形式的系统模型为:

$$\delta \mathbf{x}_{k+1|k} = \mathbf{F}_k \delta \mathbf{x}_{k|k} + \mathbf{G}_k \mathbf{w}_k \quad (7)$$

其中, $\mathbf{F}_k$ 是离散时间下的状态转移矩阵:

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 - (\mathbf{w}_{ie}^e \times) \tau & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{C}_b^e \tau & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{I}_3 \tau & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ ((\mathbf{C}_b^e \mathbf{f}_{ib}^b) \times) \tau & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 - 2(\mathbf{w}_{ie}^e \times) \tau & \mathbf{0}_3 & \mathbf{C}_b^e \tau \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中, τ 为 IMU 采样间隔。 $\mathbf{G}_k$ 为:

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_b^e & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{C}_b^e & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

系统噪声 $\mathbf{w}_k = [\mathbf{n}_g^T, \mathbf{n}_a^T, \mathbf{n}_{bg}^T, \mathbf{n}_{ba}^T]^T$, 对应的协方差矩阵:

$$\mathbf{Q}_k = \text{diag}(\sigma_g^2 \sigma_a^2 \sigma_{bg}^2 \sigma_{ba}^2) \tau \quad (10)$$

将传感器分为以 GNSS 为代表的绝对观测传感器和以相机、雷达(light detection and ranging, LiDAR)为代表的相对观测传感器。假设系统在 t_k 时刻存在 GNSS 位置和速度观测。观测模型可以写为:

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{p}_{eb}^e + \mathbf{C}_b^e \mathbf{l}_{bg}^b + \mathbf{v}_1 \quad (11)$$

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{v}_{eb}^e + \mathbf{C}_b^e (\mathbf{w}_{eb}^b \times \mathbf{l}_{bg}^b) + \mathbf{v}_2 \quad (12)$$

其中,下标 g 表示 GNSS 天线相位中心位置, $\mathbf{l}_{bg}^b$ 表示 IMU 与 GNSS 之间的杆臂, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 分别表示位置和速度观测的高斯白噪声。观测矩阵 $\mathbf{H}_1$ 和 $\mathbf{H}_2$ 可以通过线性化(11)和(12)获得:

$$\mathbf{H}_1 = [- (\mathbf{C}_b^e \mathbf{l}_{bg}^b) \times \quad -\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{0}_{3 \times 9}] \quad (13)$$

$$\mathbf{H}_2 = [- (\mathbf{C}_b^e (\mathbf{w}_{eb}^b \times) \mathbf{l}_{bg}^b) \times \quad \mathbf{0}_{3 \times 3} \quad -\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{0}_{3 \times 6}] \quad (14)$$

以相机、雷达为代表的相对观测传感器通常可以通过前端算法获得 t_k 和 t_{k+m} 两个时刻状态之间的相对位置和相对姿态。以这些前端算法的计算结果作为观测,则观测方程为:

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{C}_b^l \mathbf{C}_e^b (\mathbf{p}_{eb}^e(t_{k+m}) - \mathbf{p}_{eb}^e(t_k)) + \mathbf{v}_3 \quad (15)$$

$$\mathbf{y}_4 = \text{dcm2rv}(\mathbf{C}_e^{b_{k+m}} \mathbf{C}_e^{b_k T}) + \mathbf{v}_4 \quad (16)$$

其中, $\mathbf{y}_3$ 表示相对位置观测, $\mathbf{C}_b^l$ 表示 b 系和相对观测传感器坐标系(l 系)之间的旋转矩阵。 $\mathbf{y}_4$ 表示相对姿态观测, dcm2rv 表示从旋转矩阵到旋转向量的转换函数。 $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ 分别表示相对位置和相对姿态观测的高斯白噪声。将 $\mathbf{p}_{eb}^e(t_k)$ 和 $\mathbf{C}_e^{b_k}$ 看作真值,则观测矩阵 $\mathbf{H}_3$ 和 $\mathbf{H}_4$ 可以通过线性化式(15)和(16)获得:

$$\mathbf{H}_3 = [\mathbf{0}_3 \quad -\mathbf{C}_b^l \mathbf{C}_e^b \quad \mathbf{0}_{3 \times 9}] \quad (17)$$

$$\mathbf{H}_4 = [\mathbf{C}_b^l \mathbf{C}_e^{b_k} \quad \mathbf{0}_{3 \times 12}] \quad (18)$$

1.2 随机克隆卡尔曼滤波

为了考虑相对观测方程式(15)和(16)中, t_k 时刻状态不确定性对 t_{k+m} 时刻状态估计的影响, 将状态向量进行增广:

$$\tilde{\mathbf{X}}_{k|k} = [\mathbf{x}_{k|k}^s \quad \mathbf{x}_{k|k}^T]^T \quad (19)$$

与其对应的误差状态定义为:

$$\delta \tilde{\mathbf{X}}_{k|k} = [\delta \mathbf{x}_{k|k}^s \quad \delta \mathbf{x}_{k|k}^T]^T \quad (20)$$

其中, 上标 s 表示对 $\delta \mathbf{x}_{k|k}$ 的克隆, 即状态的复制。

$\delta \tilde{\mathbf{X}}_{k|k}$ 对应的协方差矩阵为:

$$\tilde{\mathbf{P}}_{k|k} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{P}_{k|k} \\ \mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{P}_{k|k} \end{bmatrix} \quad (21)$$

其中, $\mathbf{P}_{k|k}$ 是 t_k 时刻 $\mathbf{x}_{k|k}$ 的协方差矩阵。由式(7)可知, 从 t_k 到 t_{k+1} , 误差状态传播方程为:

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_{k+1|k}^s \\ \delta \mathbf{x}_{k+1|k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{15} & \mathbf{0}_{15} \\ \mathbf{0}_{15} & \mathbf{F}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_{k|k}^s \\ \delta \mathbf{x}_{k|k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{15 \times 12} \\ \mathbf{G}_k \end{bmatrix} \mathbf{w}_k \quad (22)$$

将式(22)记为:

$$\delta \tilde{\mathbf{X}}_{k+1|k} = \tilde{\mathbf{F}}_k \delta \tilde{\mathbf{X}}_{k|k} + \tilde{\mathbf{G}}_k \mathbf{w}_k \quad (23)$$

从 t_k 到 t_{k+1} , 增广的协方差矩阵传播方程为:

$$\tilde{\mathbf{P}}_{k+1|k} = \tilde{\mathbf{F}}_k \tilde{\mathbf{P}}_{k|k} \tilde{\mathbf{F}}_k^T + \tilde{\mathbf{G}}_k \mathbf{Q}_k \tilde{\mathbf{G}}_k^T \quad (24)$$

将式(21)代入式(24), 可以将式(24)化简为:

$$\tilde{\mathbf{P}}_{k+1|k} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{15} & \mathbf{0}_{15} \\ \mathbf{0}_{15} & \mathbf{F}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{P}_{k|k} \\ \mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{P}_{k|k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{15} & \mathbf{0}_{15} \\ \mathbf{0}_{15} & \mathbf{F}_k^T \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{G}}_k \mathbf{Q}_k \tilde{\mathbf{G}}_k^T = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{F}_k^T \\ \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{G}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{G}_k^T \end{bmatrix} \quad (25)$$

由式(23)和(25)可以继续递推得到 t_{k+m} 时刻的预测状态 $\delta \tilde{\mathbf{X}}_{k+m|k}$ 及其对应协方差 $\tilde{\mathbf{Q}}_{k+m}$ 。当 t_{k+m} 时刻观测到来时, 卡尔曼增益为:

$$\tilde{\mathbf{K}}_{k+m} = \tilde{\mathbf{P}}_{k+m|k} \tilde{\mathbf{H}}_{k+m}^T \tilde{\mathbf{S}}_{k+m}^{-1} \quad (26)$$

式中:

$$\tilde{\mathbf{H}}_{k+m} = [\mathbf{H}_k^s \quad \mathbf{H}_{k+m}] \quad (27)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_{k+m} = \tilde{\mathbf{H}}_{k+m} \tilde{\mathbf{P}}_{k+m|k} \tilde{\mathbf{H}}_{k+m}^T + \mathbf{R}_{k+m} \quad (28)$$

其中, $\mathbf{R}_{k+m}$ 是观测噪声协方差矩阵。 $\tilde{\mathbf{H}}_{k+m}$ 是增广后的观测矩阵, $\mathbf{H}_k^s$ 和 $\mathbf{H}_{k+m}$ 分别是克隆状态以及当前时刻状态对应的观测矩阵。对于式(11)和(12)中的 GNSS 位置和速度观测, 有:

$$\tilde{\mathbf{H}}_1 = [\mathbf{0}_{3 \times 15} \quad -(\mathbf{C}_b^e \mathbf{I}_{bg}^b) \times \quad -\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{0}_{3 \times 9}] \quad (29)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_2 = [\mathbf{0}_{3 \times 15} \quad -(\mathbf{C}_b^e (\mathbf{w}_{eb}^b \times) \mathbf{I}_{bg}^b) \times \quad \mathbf{0}_{3 \times 3} \quad -\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{0}_{3 \times 6}] \quad (30)$$

对于式(15)、(16)相机或雷达相对位姿观测, 有:

$$\tilde{\mathbf{H}}_3 = [\mathbf{C}_b^l \mathbf{C}_e^{b_k} (\mathbf{p}_{k+m} - \mathbf{p}_k) \times \quad \mathbf{C}_b^l \mathbf{C}_e^{b_k} \quad \mathbf{0}_{3 \times 12} \quad -\mathbf{C}_b^l \mathbf{C}_e^{b_k} \quad \mathbf{0}_{3 \times 9}] \quad (31)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_4 = [-\mathbf{C}_b^l \mathbf{C}_e^{b_k} \quad \mathbf{0}_{3 \times 12} \quad \mathbf{C}_b^l \mathbf{C}_e^{b_k} \quad \mathbf{0}_{3 \times 12}] \quad (32)$$

定义 t_{k+m} 时刻的观测新息为:

$$\mathbf{r}_{k+m} = \mathbf{z}_{k+m} - \tilde{\mathbf{H}} \delta \mathbf{x}_{k+m|k} \quad (33)$$

其中, $\mathbf{z}_{k+m}$ 是式(11)~(16)中的任意观测残差。使用线性化后的观测方程对克隆状态及其对应的协方差更新:

$$\tilde{\mathbf{X}}_{k+m|k+m} = \tilde{\mathbf{X}}_{k+m|k} + \tilde{\mathbf{K}}_{k+m} \mathbf{r}_{k+m} \quad (34)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{k+m|k+m} = \tilde{\mathbf{P}}_{k+m|k} - \tilde{\mathbf{K}}_{k+m} \tilde{\mathbf{S}}_{k+m} \tilde{\mathbf{K}}_{k+m}^T \quad (35)$$

其中, $\tilde{\mathbf{K}}_{k+m}$ 是由式(26)计算得到的卡尔曼增益。特别的, 当式(33)中是相机/雷达的相对位姿观测时, 更新完成后, 需要对状态和协方差重新克隆:

$$\tilde{\mathbf{X}}_{k+m|k+m} = [\mathbf{x}_{k+m|k+m}^T \quad \mathbf{x}_{k+m|k+m}^T]^T \quad (36)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{k+m|k+m} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k+m|k+m} & \mathbf{P}_{k+m|k+m} \\ \mathbf{P}_{k+m|k+m} & \mathbf{P}_{k+m|k+m} \end{bmatrix} \quad (37)$$

2 高效多状态克隆卡尔曼滤波

2.1 多种异步相对观测下的 SCKF

如果相机和雷达都提供相对观测, 则传统 SCKF 中的单次克隆策略将不再适用。在这种情况下需要将状态克隆两次:

$$\tilde{\mathbf{X}}_{k|k} = [\mathbf{x}_{k|k}^{s1} \quad \mathbf{x}_{k|k}^{s2} \quad \mathbf{x}_{k|k}^T]^T \quad (38)$$

其中, 前 15 维表示相机的克隆状态, 中间的 15 维表示雷达的克隆状态。相应的误差状态向量为:

$$\delta \tilde{\mathbf{X}}_{k|k} = [\delta \mathbf{x}_{k|k}^{s1} \quad \delta \mathbf{x}_{k|k}^{s2} \quad \delta \mathbf{x}_{k|k}^T]^T \quad (39)$$

$\delta \tilde{\mathbf{X}}_{k|k}$ 对应的状态方差为:

$$\tilde{\mathbf{P}}_{k|k} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{P}_{k|k} \\ \mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{P}_{k|k} \\ \mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{P}_{k|k} \end{bmatrix} \quad (40)$$

其中, $\mathbf{P}_{k|k}$ 是 t_k 时刻 $\mathbf{x}_{k|k}$ 的协方差矩阵。由式(7)可知, 从 t_k 到 t_{k+1} 的误差状态传播方程为:

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_{k+1|k}^{s1} \\ \delta \mathbf{x}_{k+1|k}^{s2} \\ \delta \mathbf{x}_{k+1|k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{15} & \mathbf{0}_{15} & \mathbf{0}_{15} \\ \mathbf{0}_{15} & \mathbf{I}_{15} & \mathbf{0}_{15} \\ \mathbf{0}_{15} & \mathbf{0}_{15} & \mathbf{F}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_{k|k}^{s1} \\ \delta \mathbf{x}_{k|k}^{s2} \\ \delta \mathbf{x}_{k|k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{30 \times 12} \\ \mathbf{G}_k \end{bmatrix} \mathbf{w}_k \quad (41)$$

将式(40)代入式(24), 从 t_k 到 t_{k+1} 的协方差矩阵传播方程为:

$$\begin{aligned}
\check{\mathbf{P}}_{k+1|k} = & \\
\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{15} & \mathbf{0}_{15} & \mathbf{0}_{15} \\ \mathbf{0}_{15} & \mathbf{I}_{15} & \mathbf{0}_{15} \\ \mathbf{0}_{15} & \mathbf{0}_{15} & \mathbf{F}_k \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{P}_{k|k} \\ \mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{P}_{k|k} \\ \mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{P}_{k|k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{15} & \mathbf{0}_{15} & \mathbf{0}_{15} \\ \mathbf{0}_{15} & \mathbf{I}_{15} & \mathbf{0}_{15} \\ \mathbf{0}_{15} & \mathbf{0}_{15} & \mathbf{F}_k^T \end{bmatrix} + \\
\check{\mathbf{G}}_k \mathbf{Q}_k \check{\mathbf{G}}_k^T = & \\
\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{F}_k^T \\ \mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{F}_k^T \\ \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{G}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{G}_k^T \end{bmatrix} & \quad (42)
\end{aligned}$$

由式(41)和(42),可以继续递推得到 t_{k+m} 时刻的预测状态 $\check{\mathbf{X}}_{k+m|k}$ 及其对应协方差 t_{k+m} 。当 t_{k+m} 时刻观测到来时,更新部分与 1.2 节中的步骤相同。相对观测更新完成后,需要对状态和协方差重新克隆。将状态更新后得到的协方差按照对应的克隆状态进行划分:

$$\check{\mathbf{P}}_{k+m|k+m} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{13} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{23} \\ \mathbf{P}_{31} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{33} \end{bmatrix} \quad (43)$$

其中, $\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{22}, \mathbf{P}_{33} \in \mathbf{R}^{15 \times 15}$, 分别对应相机克隆状态、雷达克隆状态、以及原始状态的协方差子矩阵。如果 t_{k+m} 时刻相对参考时刻 $\check{\mathbf{X}}_{k+m|k+m}$ 进行了相机的相对位姿观测更新, 则按式(44)和(45)进行 $\check{\mathbf{X}}_{k+m|k+m}$ 和 $\check{\mathbf{P}}_{k+m|k+m}$ 的重置:

$$\check{\mathbf{X}}_{k+m|k+m} = [\mathbf{x}_{k+m|k+m}^{s1T} \quad \mathbf{x}_{k|k}^{s2T} \quad \mathbf{x}_{k+m|k+m}^{T}]^T \quad (44)$$

$$\check{\mathbf{P}}_{k+m|k+m} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{33} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{33} \\ \mathbf{P}_{23} & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{23} \\ \mathbf{P}_{33} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{33} \end{bmatrix} \quad (45)$$

同样地, t_{k+n} 时刻, 如果有雷达的相对位姿观测更新, 则按式(46)和(47)进行 $\check{\mathbf{X}}_{k+n|k+n}$ 和 $\check{\mathbf{P}}_{k+n|k+n}$ 的重置:

$$\check{\mathbf{X}}_{k+n|k+n} = [\mathbf{x}_{k|k}^{s1T} \quad \mathbf{x}_{k+n|k+n}^{s2T} \quad \mathbf{x}_{k+n|k+n}^{T}]^T \quad (46)$$

$$\check{\mathbf{P}}_{k+n|k+n} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{13} & \mathbf{P}_{13} \\ \mathbf{P}_{31} & \mathbf{P}_{33} & \mathbf{P}_{33} \\ \mathbf{P}_{31} & \mathbf{P}_{33} & \mathbf{P}_{33} \end{bmatrix} \quad (47)$$

类似地, 如果系统涉及 N 种异步相对观测, SCKF 需要将当前状态克隆 N 次, 过程与式(38)~(47)类似。包含多种异步相对观测的 SCKF 流程如算法 1 所示。

算法 1: 多种异步相对观测下的 SCKF

输入: $\mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}, \mathbf{Q}_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}$, IMU 观测

输出: 校正后的 $\check{\mathbf{X}}_{k+1|k+1}, \check{\mathbf{P}}_{k+1|k+1}$

1: if $k=0$

2: 克隆: $\check{\mathbf{X}}_{k|k}, \check{\mathbf{P}}_{k|k}, \delta\check{\mathbf{X}}_{k|k} = \mathbf{0}$

3: else $k > 0$

4: 传播: $\delta\check{\mathbf{X}}_{k|k} \rightarrow \delta\check{\mathbf{X}}_{k+1|k}, \check{\mathbf{P}}_{k|k} \rightarrow \check{\mathbf{P}}_{k+1|k}$

5: 更新: 根据 $\mathbf{y}_{k+1}$, 计算 $\mathbf{H}_{k+1}\mathbf{R}_{k+1}$, 得到 $\mathbf{K}_{k+1}$ 。 $\delta\check{\mathbf{X}}_{k+1|k} \rightarrow \delta\check{\mathbf{X}}_{k+1|k+1}, \check{\mathbf{P}}_{k+1|k} \rightarrow \check{\mathbf{P}}_{k+1|k+1}$

6: 重置以及校正: $\delta\check{\mathbf{X}}_{k+1|k+1} = \mathbf{0}, \check{\mathbf{X}}_{k+1|k} \rightarrow \check{\mathbf{X}}_{k+1|k+1}$

7: if 存在相对观测

8: 根据相对观测类型重新克隆 $\check{\mathbf{X}}_{k+1|k+1}, \check{\mathbf{P}}_{k+1|k+1}$

9: return $\check{\mathbf{X}}_{k+1|k+1}, \check{\mathbf{P}}_{k+1|k+1}$

2.2 状态降维

由于存在多种异步相对观测传感器, 需要进行多次状态克隆, 导致状态向量及其对应的协方差维度显著升高。这给实时运行的嵌入式系统带来了较大的计算负担。由式(31)和(32)可知, 相对位姿观测仅与 t_k 时刻的位置和姿态直接相关, 因此仅克隆过去时刻的位姿, 而非全部状态向量, 有望在降低克隆状态维度的同时, 保持较低的估计精度损失。具体来说, 对于状态向量, 只克隆位置和姿态, 则有:

$$\check{\mathbf{X}}_{k|k} = [\mathbf{x}_{k|k}^{s01T}, \mathbf{x}_{k|k}^{s02T}, \mathbf{x}_{k|k}^{T}]^T \quad (48)$$

其中, $\check{\mathbf{X}}_{k|k}^{s01} = [\boldsymbol{\Psi}_{eb}^T \quad p_{eb}^b]^T$, $\check{\mathbf{X}}_{k|k}^{s02} = [\boldsymbol{\Psi}_{eb}^T \quad p_{eb}^b]^T$, 前 6 维表示相机的克隆状态, 中间的 6 维表示雷达的克隆状态。相应的误差状态向量为:

$$\delta\check{\mathbf{X}}_{k|k} = [\delta\mathbf{x}_{k|k}^{s01T}, \delta\mathbf{x}_{k|k}^{s02T}, \delta\mathbf{x}_{k|k}^{T}]^T \quad (49)$$

则误差状态传播方程:

$$\begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}_{k|k}^{s01} \\ \delta\mathbf{x}_{k|k}^{s02} \\ \delta\mathbf{x}_{k+1|k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_6 & \mathbf{0}_6 & \mathbf{0}_{6 \times 15} \\ \mathbf{0}_6 & \mathbf{I}_6 & \mathbf{0}_{6 \times 15} \\ \mathbf{0}_{15 \times 6} & \mathbf{0}_{15 \times 6} & \mathbf{F}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}_{k|k}^{s01} \\ \delta\mathbf{x}_{k|k}^{s02} \\ \delta\mathbf{x}_{k|k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{12} \\ \mathbf{G}_k \end{bmatrix} \mathbf{w}_k \quad (50)$$

为了便于表示协方差的传播和克隆, 这里使用一种取子矩阵的表示方法。设矩阵 $\mathbf{M} \in \mathbf{R}^{15 \times 15}$, 矩阵 $\mathbf{M}$ 可分块为:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (51)$$

其中, $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{6 \times 6}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{6 \times 9}, \mathbf{C} \in \mathbf{R}^{9 \times 6}, \mathbf{D} \in \mathbf{R}^{9 \times 9}$ 。矩阵 $\mathbf{M}$ 被分为 4 块, 使用下标 $ABCD$ 来表示取矩阵 $\mathbf{M}$ 对应的子矩阵。例如 $\mathbf{P}_{k|kA}$ 表示 $\mathbf{P}_{k|k}$ 矩阵左上角 6×6 的矩阵, $\mathbf{P}_{k|kAB}$ 表示 $\mathbf{P}_{k|k}$ 矩阵上半部分 6×15 的子矩阵。则 $\delta\check{\mathbf{X}}_{k|k}$ 对应的增广的协方差矩阵为:

$$\check{\mathbf{P}}_{k|k} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k|kA} & \mathbf{P}_{k|kA} & \mathbf{P}_{k|kAB} \\ \mathbf{P}_{k|kA} & \mathbf{P}_{k|kA} & \mathbf{P}_{k|kAB} \\ \mathbf{P}_{k|kAC} & \mathbf{P}_{k|kAC} & \mathbf{P}_{k|k} \end{bmatrix} \quad (52)$$

对于协方差矩阵的传播, 类比式(25), 有:

$$\tilde{\mathbf{P}}_{k+1|k} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_6 & \mathbf{0}_6 & \mathbf{0}_{6 \times 15} \\ \mathbf{0}_6 & \mathbf{I}_6 & \mathbf{0}_{6 \times 15} \\ \mathbf{0}_{15 \times 6} & \mathbf{0}_{15 \times 6} & \mathbf{F}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k|kA} & \mathbf{P}_{k|kA} & \mathbf{P}_{k|kAB} \\ \mathbf{P}_{k|kA} & \mathbf{P}_{k|kA} & \mathbf{P}_{k|kAB} \\ \mathbf{P}_{k|kAC} & \mathbf{P}_{k|kAC} & \mathbf{P}_{k|k} \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{G}}_k \mathbf{Q}_k \tilde{\mathbf{G}}_k^T \quad (53)$$

t_{k+m} 时刻观测更新后,将状态更新后得到协方差按照对应的克隆状态进行划分:

$$\tilde{\mathbf{X}}_{k+m|k+m} = [\mathbf{x}_{k+m|k+m}^{s01T} \quad \mathbf{x}_{k|k}^{s02T} \quad \mathbf{x}_{k+m|k+m}^T]^T \quad (54)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{k+m|k+m} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{13} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{23} \\ \mathbf{P}_{31} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{33} \end{bmatrix} \quad (55)$$

其中, $\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{22} \in \mathbf{R}^{6 \times 6}, \mathbf{P}_{33} \in \mathbf{R}^{15 \times 15}$ 。如果 t_{k+m} 时刻进行了相机的相对位姿观测更新,则按式 (56) 和 (57) 进行 $\tilde{\mathbf{X}}_{k+m|k+m}$ 和 $\tilde{\mathbf{P}}_{k+m|k+m}$ 的重置:

$$\tilde{\mathbf{X}}_{k+m|k+m} = [\mathbf{x}_{k+m|k+m}^{s01T} \quad \mathbf{x}_{k|k}^{s02T} \quad \mathbf{x}_{k+m|k+m}^T]^T \quad (56)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{k+m|k+m} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{33A} & \mathbf{P}_{32A} & \mathbf{P}_{33AB} \\ \mathbf{P}_{23A} & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{23} \\ \mathbf{P}_{33AC} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{33} \end{bmatrix} \quad (57)$$

同样地, t_{k+n} 时刻,如果有雷达的相对位姿观测更新,则按式 (58) 进行 $\tilde{\mathbf{X}}_{k+n|k+n}$ 和 $\tilde{\mathbf{P}}_{k+n|k+n}$ 的重置:

$$\tilde{\mathbf{X}}_{k+n|k+n} = [\mathbf{x}_{k|k}^{s01T} \quad \mathbf{x}_{k+n|k+n}^{s02T} \quad \mathbf{x}_{k+n|k+n}^T]^T \quad (58)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{k+n|k+n} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{13A} & \mathbf{P}_{13} \\ \mathbf{P}_{31A} & \mathbf{P}_{33A} & \mathbf{P}_{33AB} \\ \mathbf{P}_{31} & \mathbf{P}_{33AC} & \mathbf{P}_{33} \end{bmatrix} \quad (59)$$

比较式 (48) 与 (38),采用降维策略后,状态维度从 45 维降低至 27 维。一般情况下,若系统涉及 N 个异步相对观测,降维策略可将估计状态维度从 $15(N+1)$ 降低至 $15+6N$ 。

2.3 Consider 随机克隆卡尔曼滤波

对于 SCKF 算法,任何类型的观测更新均会将克隆部分的状态和协方差也进行更新。但是对于实时导航状态估计,更新被克隆的状态(过去时刻的状态)是无用的。本小节考虑将 CKF 的更新策略^[31]引入到克隆滤波。在观测更新的时候,考虑克隆状态不确定性对整个滤波估计的影响,但是不更新被克隆状态,从而在几乎不牺牲估计精度的条件下,减少 SCKF 状态扩增带来的计算负担。定义克隆部分的状态向量, t_{k+m} 时的测量矩阵写为 $\tilde{\mathbf{H}}_{k+m} = [\mathbf{H}_{k+m}^{s0} \quad \mathbf{H}_{k+m}]$ 。其中 $\mathbf{H}_{k+m}^{s0}$ 和 $\mathbf{H}_{k+m}$ 分别表示 t_{k+m} 时刻状态向量 $\mathbf{p}$ 和 $\delta \mathbf{x}_{k|k}$ 对应的观测矩阵。为了保证在观测更新中 $\mathbf{p}$ 不被更新,令:

$$\tilde{\mathbf{K}}_{k+m} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{12 \times 1} \\ \mathbf{K}_{k+m} \end{bmatrix} \quad (60)$$

其中, $\mathbf{K}_{k+m}$ 是式 (26) 中卡尔曼增益的后 15 维的部分,可以写为:

$$\mathbf{K}_{k+m} = (\mathbf{P}_{k+m}^{xx} \mathbf{H}_{k+m}^T + \mathbf{P}_{k+m}^{xp} \mathbf{H}_{k+m}^{s0T}) (\mathbf{H}_{k+m} \mathbf{P}_{k+m}^{xx} \mathbf{H}_{k+m}^T + \mathbf{H}_{k+m} \mathbf{P}_{k+m}^{xp} \mathbf{H}_{k+m}^{s0T} + \mathbf{H}_{k+m}^{s0} \mathbf{P}_{k+m}^{px} \mathbf{H}_{k+m}^T + \mathbf{H}_{k+m}^{s0} \mathbf{P}_{k+m}^{pp} \mathbf{H}_{k+m}^{s0T} + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (61)$$

其中,协方差矩阵为:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+m}^{pp} &= E\{(\hat{\mathbf{p}}_{k+m|k} - \mathbf{p}_{k+m|k})(\hat{\mathbf{p}}_{k+m|k} - \mathbf{p}_{k+m|k})^T\} \\ \mathbf{P}_{k+m}^{xp} &= \mathbf{P}_{k+m}^{px}^T = E\{(\delta \hat{\mathbf{x}}_{k+m|k} - \delta \mathbf{x}_{k+m|k})(\hat{\mathbf{p}}_{k+m|k} - \mathbf{p}_{k+m|k})^T\} \\ \mathbf{P}_{k+m}^{xx} &= E\{(\delta \hat{\mathbf{x}}_{k+m|k} - \delta \mathbf{x}_{k+m|k})(\delta \hat{\mathbf{x}}_{k+m|k} - \delta \mathbf{x}_{k+m|k})^T\} \end{aligned} \quad (62)$$

将式 (61) 代入式 (34),则 C-SCKF 在 t_{k+m} 时刻的状态更新过程可以化简为:

$$\mathbf{x}_{k+m|k+m} = \mathbf{x}_{k+m|k} + \mathbf{K}_{k+m}(\mathbf{z}_{k+m} - \mathbf{H}_{k+m} \delta \mathbf{x}_{k+m|k} - \mathbf{H}_{k+m}^{s0} \mathbf{P}_{k+m|k}) \quad (63)$$

C-SCKF 协方差更新过程可以化简为:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+m}^{xx} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+m} \mathbf{H}_{k+m}) \mathbf{P}_{k+m}^{xx} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+m} \mathbf{H}_{k+m})^T + \mathbf{K}_{k+m} (\mathbf{H}_{k+m}^{s0} \mathbf{P}_{k+m|k} \mathbf{H}_{k+m}^{s0T} + \mathbf{R}_{k+m}) \mathbf{K}_{k+m}^T - \\ &(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+m} \mathbf{H}_{k+m}) \mathbf{P}_{k+m}^{xp} \mathbf{H}_{k+m}^{s0T} \mathbf{K}_{k+m}^T - \\ &\mathbf{K}_{k+m} \mathbf{H}_{k+m}^{s0} \mathbf{P}_{k+m|k} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+m} \mathbf{H}_{k+m})^T \\ \mathbf{P}_{k+m}^{xp} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+m} \mathbf{H}_{k+m}) \mathbf{P}_{k+m}^{xp} - \mathbf{K}_{k+m} \mathbf{H}_{k+m}^{s0} \mathbf{P}_{k+m|k} \end{aligned} \quad (64)$$

$$\mathbf{P}_{k+m}^{pp} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+m} \mathbf{H}_{k+m}) \mathbf{P}_{k+m}^{pp} - \mathbf{K}_{k+m} \mathbf{H}_{k+m}^{s0} \mathbf{P}_{k+m|k} \quad (65)$$

根据式 (63) ~ (65),当处理两种异步相对观测时,C-SCKF 只需要更新当前状态 $\mathbf{P}_{xx} \in \mathbf{R}^{15 \times 15}$ 以及协方差矩阵 $\mathbf{P}_{xx} \in \mathbf{R}^{15 \times 15}$ 和 $\mathbf{P}_{xp} \in \mathbf{R}^{15 \times 12}$ 即可。C-SCKF 的算法流程如算法 2 所示。

算法 2: C-SCKF 算法

输入: $\mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}, \mathbf{Q}_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}$, IMU 观测

输出: 校正后的 $\tilde{\mathbf{X}}_{k+1|k+1}, \tilde{\mathbf{P}}_{k+1|k+1}$

- 1: if $k=0$
- 2: 克隆 $\tilde{\mathbf{X}}_{k|k}, \tilde{\mathbf{P}}_{k|k}$, 设置 $\delta \tilde{\mathbf{X}}_{k|k} = \mathbf{0}$
- 3: else $k > 0$
- 4: 传播: $\delta \tilde{\mathbf{X}}_{k|k} \rightarrow \delta \tilde{\mathbf{X}}_{k+1|k}, \tilde{\mathbf{P}}_{k|k} \rightarrow \tilde{\mathbf{P}}_{k+1|k}$
- 5: if 存在绝对观测
- 6: 更新: $\delta \tilde{\mathbf{X}}_{k+1|k} \rightarrow \delta \tilde{\mathbf{X}}_{k+1|k+1}, \tilde{\mathbf{P}}_{k+1|k} \rightarrow \tilde{\mathbf{P}}_{k+1|k+1}$
- 7: if 存在相对观测
- 8: 提取: $\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{P}_{k+1|k}^{xx}, \mathbf{P}_{k+1|k}^{xp}$
- 9: 更新: $\delta \mathbf{x}_{k+1|k} \rightarrow \delta \mathbf{x}_{k+1|k+1}, \mathbf{P}_{k+1|k}^{xx} \rightarrow \mathbf{P}_{k+1|k+1}^{xx}, \mathbf{P}_{k+1|k}^{xp} \rightarrow \mathbf{P}_{k+1|k+1}^{xp}$

10: 重置以及校正: $\delta \check{\mathbf{X}}_{k+1|k+1} = \mathbf{0}, \check{\mathbf{X}}_{k+1|k} \rightarrow \check{\mathbf{X}}_{k+1|k+1}$

11: 根据相对观测类型重新克隆 $\check{\mathbf{X}}_{k+1|k+1}, \check{\mathbf{P}}_{k+1|k+1}$

12: **return** $\check{\mathbf{X}}_{k+1|k+1}, \check{\mathbf{P}}_{k+1|k+1}$

2.4 计算复杂度分析

表 1 比较了系统包含 N 种异步相对观测时不同方法的状态向量维度和协方差维度。其中, n 表示当前时刻状态向量的维度, n_0 表示降维后克隆状态向量的维度。

表 2 总结了 SCKF 和 C-SCKF 算法滤波主要步骤的复杂度, 列出了计算卡尔曼增益、状态更新和协方差更新所需的加法和乘法次数。浮点运算数 (floating point operations, flops) 以这些步骤所需运算次数的累加和表

表 1 N 种异步相对观测的状态向量和协方差矩阵的维数

Table 1 Dimensions of the state vector and covariance matrices for N distinct relative observations

方法	状态向量	协方差矩阵
SCKF	$(N+1)n$	$(N+1)n \times (N+1)n$
降维	$n+Nn_0$	$(n+Nn_0) \times (n+Nn_0)$
C-SCKF [*]	n	$n \times n; Nn_0 \times n^{\dagger}$

注: “*” 表示使用了降维和 consider 卡尔曼滤波更新策略; “†” 表示估计状态和 consider 状态之间的协方差。

示。表 2 中的复杂度表示为观测向量维度 m 和上述状态维度的函数, 其余变量定义与表 1 中的一致。这些计算假设使用高斯消元法进行矩阵求逆^[25,32]。结果表明, 与传统 SCKF 相比, C-SCKF 显著降低了计算量。

表 2 SCKF 和 CSCKF 的计算复杂度分析

Table 2 Arithmetic complexity of SCKF and C-SCKF

运算方法	滤波步骤	SCKF	C-SCKF
乘法	卡尔曼增益	$0.33m^3 + (N+1)^2n^2m + 2(N+1)nm^2 + m^2 - 0.33m$	$0.33m^3 + 3nm^2 + n^2m + Nn_0m^2 + N^2n_0^2m + Nn_0nm + m^2 - 0.33m$
	状态更新	$2(N+1)nm$	$2nm$
	协方差更新	$2(N+1)^3n^3 + 2(N+1)^2n^2m + (N+1)nm^2$	$2n^3 + 3n^2m + 4Nn_0n^2 + 2N^2n_0^2n + nm^2 + 2Nn_0nm$
加法	卡尔曼增益	$0.33m^3 + (N+1)^2n^2m + 2(N+1)nm^2 - 2(N+1)nm + 0.5m^2 - 0.83m$	$0.33m^3 + 3nm^2 + N^2n_0^2m + Nn_0m^2 - Nn_0m + 1.5m^2 - nm - 0.83m$
	状态更新	$2(N+1)nm$	$2nm$
	协方差更新	$2(N+1)^3n^3 + 2(N+1)^2n^2m + (N+1)nm^2 - 3(N+1)^2n^2 - (N+1)nm + (N+1)n$	$2n^3 + 3n^2m + 2N^2n_0^2n + 4Nn_0n^2 - 3n^2 + nm^2 + 2Nn_0nm - 5Nn_0n - nm + 2n$
flops		$4(N+1)^3n^3 + 0.67m^3 + 6(N+1)^2n^2m + 6(N+1)nm^2 - 3(N+1)^2n^2 + 1.5m^2 + (N+1)nm + (N+1)n - 1.17m$	$4n^3 + 0.67m^3 + 7n^2m + 8nm^2 + 2Nn_0m^2 + 2N^2n_0^2m + 5Nn_0nm + 4N^2n_0^2n + 8Nn_0n^2 - 3n^2 + 2.5m^2 + 2nm - 5Nn_0n - Nn_0m + 2n - 1.17m$

注: n 为状态向量维度, m 为观测维度, n_0 为克隆状态维度; N 为相对观测数量

具体而言, 表 3 列出了当状态维度 $n = 15$ 、观测维度 $m = 3$ 、克隆状态维度 $n_0 = 6$ 时, C-SCKF 和 SCKF 随相对观测数量 N 变化的总 flops。当 $N = 2$ 时, SCKF 的 flops 是 C-SCKF 的大约 8 倍。随着相对观测传感器数量的增加, 这一优势将更加明显。

表 3 不同相对观测数量 SCKF 和 C-SCKF 的 flops

Table 3 Total flops of SCKF and C-SCKF for varying numbers of different relative observations

N	SCKF	C-SCKF	SCKF/C-SCKF
1	1.23×10^5	3.19×10^4	3.86
2	3.98×10^5	4.76×10^4	8.36
3	9.22×10^5	6.58×10^4	14.01

3 实验验证

本章分别通过仿真和实验验证 C-SCKF 算法相比 SCKF、EKF 的精度与效率优势。

3.1 仿真实验

模拟载体进行 8 字形曲线运动, 载体上装有 IMU, GNSS, 相机和 LiDAR。设定导航坐标系 (n 系) 下的真实的姿态 $\mathbf{q}_n^b$ 和位置 $\mathbf{p}^n$ 轨迹为:

$$\mathbf{q}_n^b = \left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \begin{bmatrix} 0 & \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) \end{bmatrix} \right]^T \quad (66)$$

$$\mathbf{p}_{nb}^n = \mathbf{p}_{nb}^n(0) + \begin{bmatrix} a \cos(w_1 t + \varphi_1) \cos(w_2 t + \varphi_2) \\ b \cos(w_3 t) \end{bmatrix}^T \quad (67)$$

不失一般性, 本文导航系的定义为北-天-东。常数

$\alpha = 10^\circ, \Omega = 0.034\pi, a = 20/R, b = 20, w_1 = 0.02\pi, w_2 = 0.01\pi, w_3 = 0.01\pi, \varphi_1 = 0.6\pi, \varphi_2 = 0.2\pi$ 。载体初始位置 $p^n(0) = [120E \ 30N \ 0]^T$, 其中 R 为地球半径。仿真数据时间 10 min, 运动轨迹长度约 577 m。仿真数据的运动轨迹和 GNSS 的位置观测如图 1 所示。仿真采样频率为 100 Hz 的消费级 IMU, 具体参数如表 4 所示。

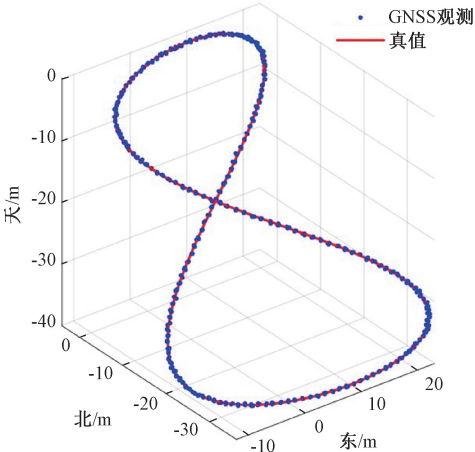


图 1 仿真轨迹与 GNSS 观测

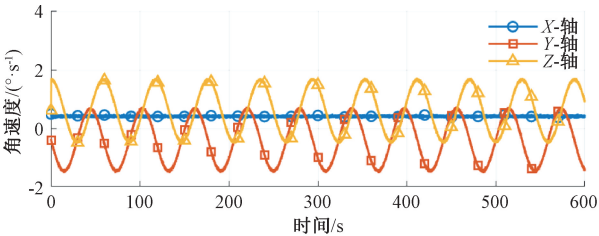
Fig. 1 Simulated ground truth trajectory and GNSS observations

表 4 IMU 基本参数

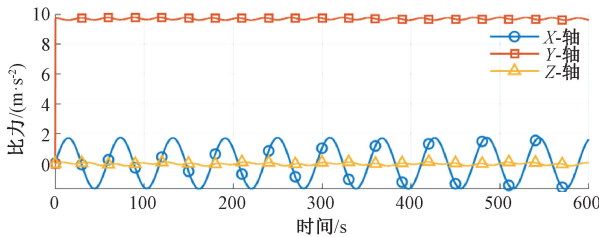
Table 4 IMU specifications

误差项	陀螺仪	加速度计
零偏	$[0.5 \ -0.4 \ 0.6]^\circ/\text{s}$	$[0.02 \ -0.03 \ 0.02]\text{mg}$
随机游走	$0.15^\circ/\sqrt{\text{h}}$	$2.0 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2 / \sqrt{\text{Hz}}$
零偏随机游走	$70.54^\circ/\text{h}^{3/2}$	$1.17 \times 10^{-5} \text{ m/s}^2$

IMU 原始数据仿真结果如图 2 所示。



(a) 陀螺仪数据
(a) Gyroscope data



(b) 加速度计数据
(b) Accelerometer data

图 2 IMU 原始数据仿真结果

Fig. 2 Simulated IMU raw outputs

传感器的观测标准差和采样频率在表 5 中列出。

表 5 所有观测的标准差和采样频率

Table 5 The noise standard deviations and sampling frequencies of all observations

观测类型	标准差	采样频率/Hz
GNSS 位置	0.1 m	1
GNSS 速度	0.05 m/s	1
相机相对位置	0.05 m	20
相机相对姿态	0.2 deg	20
LiDAR 相对位置	0.05 m	10
LiDAR 相对姿态	0.2°	10

n 系下的初始三轴位置误差均为 10 m, 三轴速度误差 0.1 m/s。姿态俯仰角、航向角、横滚角误差均为 10° 。初始陀螺仪零偏和加速度计零偏均为 0。

仿真计算平台如图 3 所示。

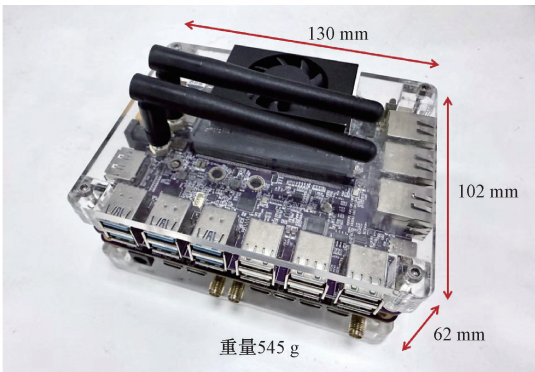


图 3 计算终端平台(武汉大学供图)

Fig. 3 Computing terminal platform (by courtesy of Wuhan University)

使用 Jetson Orin NX(16 G), 搭载 32 个 Tensor Core 的 1024 核 NVIDIA Ampere 架构 GPU, Arm Cortex-A78AE v8.2 版本 64 位 CPU。为了衡量算法估计值与真实值之间的偏差程度, 使用均方根误差 (root mean square error, RMSE) 作为核心评价指标, 计算公式为:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \hat{\mathbf{X}}_i)^2} \quad (68)$$

其中, n 表示样本数量, $\mathbf{X}_i$ 表示第 i 个状态量的真值, $\hat{\mathbf{X}}_i$ 为对应的预测值。

图 4~8 给出了位置、速度和姿态误差以及零偏估计结果。

表 6 比较了位置、速度、姿态误差的 RMSE。由于 EKF 在使用相对位置观测和相对姿态观测时, 将上一个

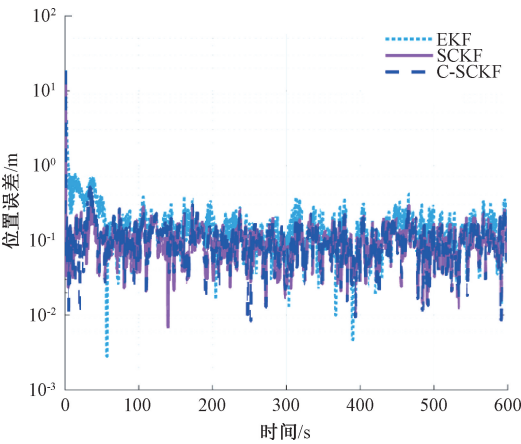


图 4 位置估计误差
Fig. 4 Position estimation errors

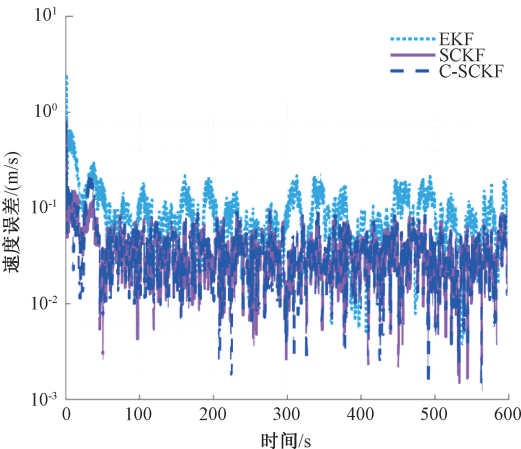


图 5 速度估计误差
Fig. 5 Velocity estimation errors

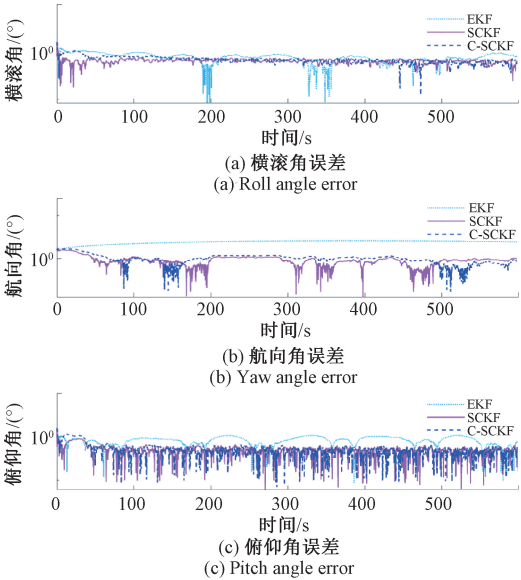


图 6 姿态估计误差
Fig. 6 Attitude estimation errors

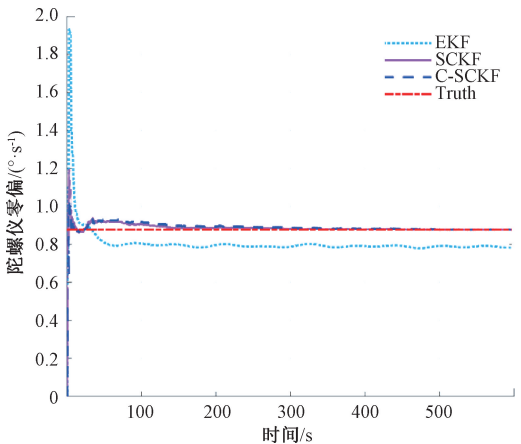


图 7 陀螺仪零偏估计结果
Fig. 7 Gyroscope bias estimation

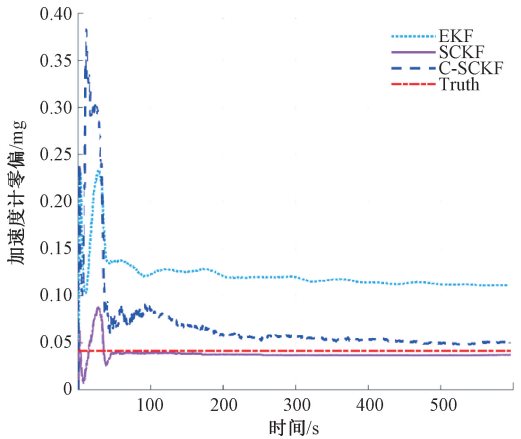


图 8 加速度计零偏估计结果
Fig. 8 Accelerometer bias estimation

表 6 仿真环境下导航估计的均方根误差
Table 6 Navigation estimation RMSEs in simulation

状态量	EKF	SCKF	C-SCKF
位置/m	0.77	0.72	0.72
速度/($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	0.13	0.05	0.05
姿态/($^{\circ}$)	92.03	2.10	3.21

时刻的状态当作真值来进行处理,因此航向角误差较大,而 C-SCKF 算法的误差和 SCKF 算法保持一致。

图 9 中比较了计算终端平台下仿真数据 5 次 Monte-Carlo 的运行时间。结果表明,C-SCKF 算法比 SCKF 快约 4.3 倍,且估计精度几乎没有下降。

3.2 实测实验

实验设备由四轮移动平台,传感器和车载计算终端组成。图 10 和 11 分别展示了武汉和上海实验平台的整体结构组成。四轮移动平台安装的传感器包含 Unistrong

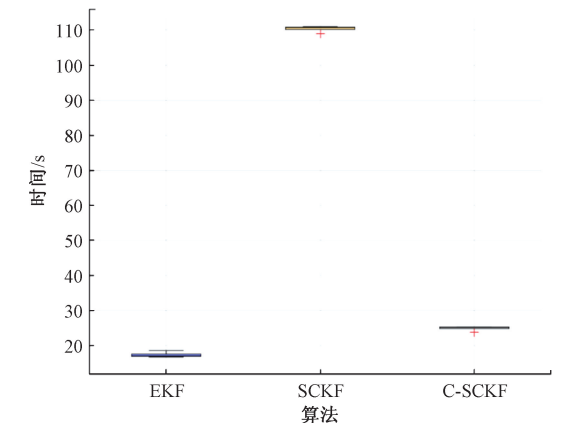


图 9 嵌入式计算终端平台上的算法执行时间统计分析

Fig. 9 Statistical analysis of algorithm execution time on embedded computing terminal platform

NET20 接收机、ZED-F9P u-blox GNSS 模块、BFSU3-31S4C-C 相机、ADIS16470 惯性导航单元以及高精度 XWGI7660 GNSS/INS 组合导航系统。IMU 采样频率 200 Hz,其他传感器采样频率和表 5 中的相同,所采用的计算平台与仿真实验相同。

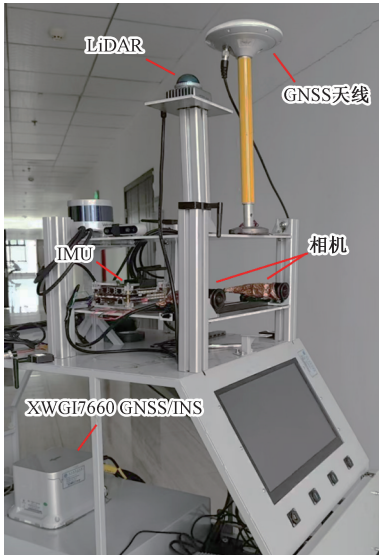


图 10 武汉车载数据采集平台(武汉大学供图)

Fig. 10 Vehicle-mounted data acquisition platform in Wuhan (by courtesy of Wuhan University)

为评估算法在不同环境下的性能,在两个不同地点开展了实测实验。数据集 W01~W03 采集于武汉大学友谊广场,该场景树木茂密、周边建筑密集,环境较为复杂。数据集 S01~S03 采集于上海 G60 上海交大云智测试中心,该区域相对开阔,植被稀疏。针对这两个数据集,在图 3 所示的嵌入式计算终端上实现了传感器数据的实时处理。相机与激光雷达的相对位置和姿

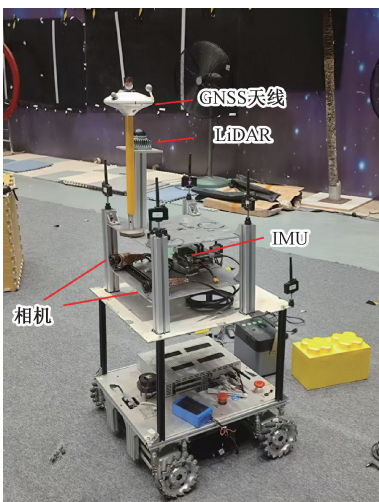


图 11 上海车载数据采集平台(武汉大学供图)

Fig. 11 Vehicle-mounted data acquisition platform in Shanghai (by courtesy of Wuhan University)

态观测分别采用视觉-惯性里程计^[33]和激光雷达-惯性里程计^[34-35]算法获得。参考真值通过高精度 XWGI7660 GNSS/INS 组合导航系统获得。实测实验所用数据集的详细信息(包括环境描述与轨迹长度)汇总于表 7,每组实验持续约 10 min。

表 7 实测试验所用数据集说明		
Table 7 Description of the datasets used in the field tests		
数据集	环境	轨迹长度/m
W01	武汉-密集建筑和树木	798. 62
W02		811. 07
W03		816. 10
S01	上海-相对开阔,树木稀疏	395. 17
S02		403. 40
S03		397. 79

图 12 和 13 为原始观测与估计结果在水平面内的轨迹。在图 12 中,轨迹北段因茂密树木和高大建筑物遮挡导致信号受阻,GNSS 水平方向误差约为 5 m。图 14 和 15 详细对比了不同算法所得的位置误差。对于数据集 W02,当 GNSS 信号可靠时,C-SCKF 的位置误差约为 0.1 m;即便 GNSS 误差接近 10 m,C-SCKF 仍能保持约 1 m 的精度。如数据集 S02 所示,在 GNSS 信号良好的条件下,C-SCKF 与 SCKF 的输出几乎完全一致。这些结果表明,C-SCKF 与 SCKF 在不同场景下具有高度的一致性。

表 8 汇总了 3 种算法在数据集 W02 上得到的位置、速度和姿态的均方根误差,表 9 给出了 6 组数据集在不同算法下的位置误差。

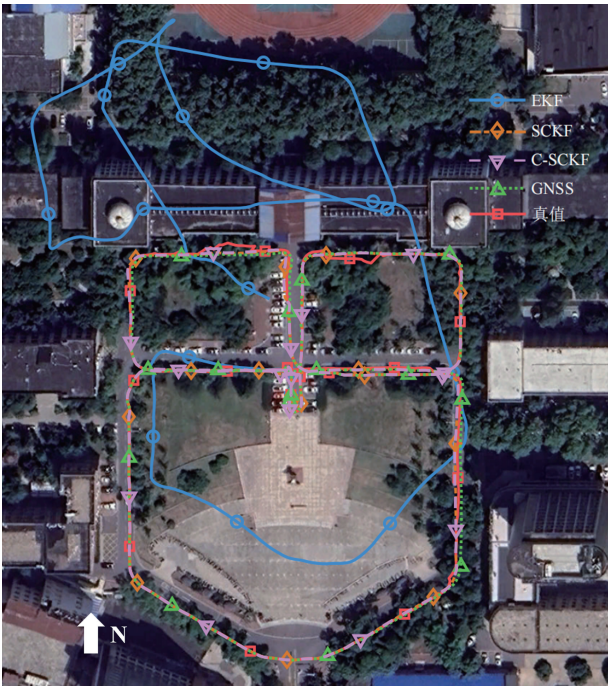


图 12 W02 数据轨迹真值、GNSS 观测轨迹以及不同算法估计的轨迹

Fig. 12 Ground truth trajectory of W02 data, GNSS-observed trajectory, and trajectories estimated by different algorithms

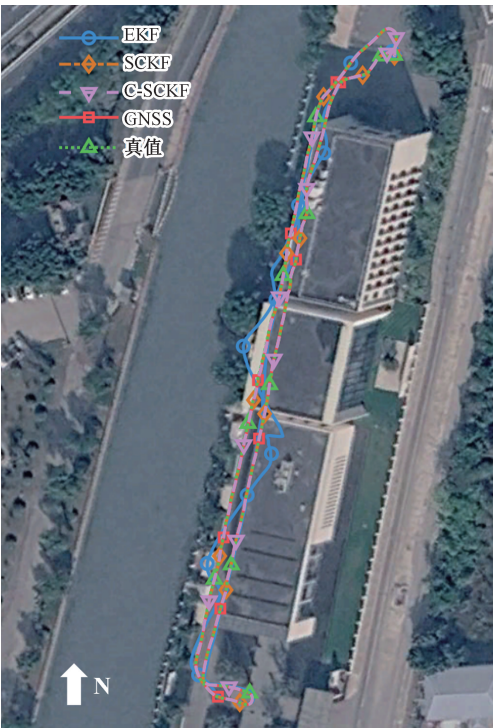


图 13 S02 数据轨迹真值、GNSS 观测轨迹以及不同算法估计的轨迹

Fig. 13 Ground truth trajectory of S02 data, GNSS-observed trajectory, and trajectories estimated by different algorithms

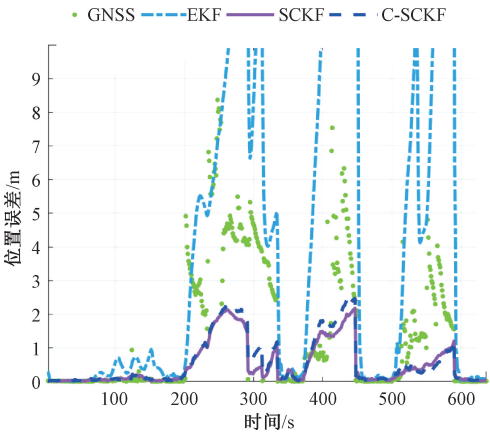


图 14 W02 的位置误差

Fig. 14 Position errors of W02

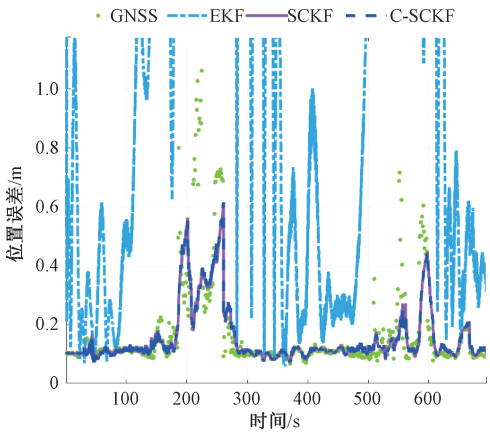


图 15 S02 的位置误差

Fig. 15 Position errors of S02

表 8 W02 导航估计结果的 RMSE

Table 8 Navigation estimation RMSEs in W02

状态量	EKF	SCKF	C-SCKF
位置/m	55.38	0.82	0.92
速度/($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	0.89	0.09	0.13
姿态/($^{\circ}$)	6.34	2.05	2.47

结果表明,C-SCKF 的精度与 SCKF 相当,且显著优于 EKF。与 SCKF 相比,C-SCKF 的位置误差略大(约几厘米),这可能是因为降维处理忽略了被舍弃状态与当前状态之间的协方差。图 16 展示了在嵌入式计算平台上,5 种算法各进行五次蒙特卡洛运行所得到的执行时间。

为保证对比的有效性,所有算法均采用一致的参数设置,并在相同的环境下执行。结果表明,C-SCKF 的计算效率与 EKF 相当,比 SCKF 快约 5 倍。

表 9 位置误差 RMSE

Table 9 Comprehensive RMSE of position errors (m)

数据集	EKF	SCKF	C-SCKF
W01	27.58	0.83	0.91
W02	55.38	0.82	0.92
W03	79.23	2.21	2.23
S01	3.38	0.14	0.14
S02	4.75	0.19	0.19
S03	0.41	0.11	0.11

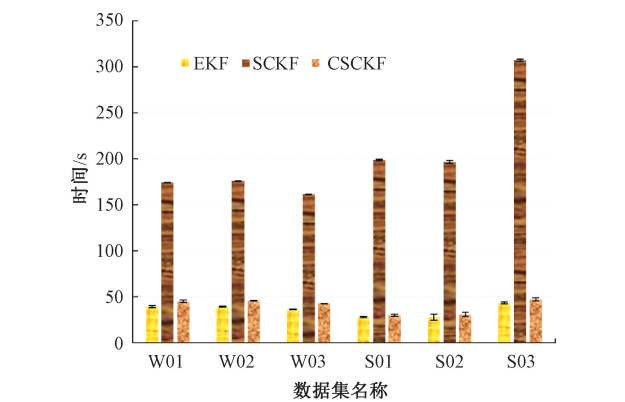


图 16 6 组数据的不同算法的计算时间
Fig. 16 Algorithmic computation time for six datasets

4 结 论

SCKF 在处理相对观测方面具有较高的精度。然而,对于包含 N 个相对观测传感器的组合导航系统,SCKF 中估计状态的维度为 $15(N+1)$,导致计算复杂度较高。C-SCKF 算法通过状态降维策略和基于 Consider 卡尔曼滤波的更新方案,将状态维度从 $15(N+1)$ 降低至 15。本文推导并对比了 SCKF 与 C-SCKF 的计算复杂度。对包含两种相对观测传感器的组合导航系统进行的数值仿真与实测实验表明,C-SCKF 的计算速度约为 SCKF 的五倍,且估计精度无明显下降。随着更多相对观测传感器的加入,这一优势将更加显著。未来的工作将引入里程计^[36]等更多类型的相对观测,进一步提升 C-SCKF 在实际工作场景中的性能。

参考文献

[1] 万俊豪,左建勇,丁景贤,等. 基于新息自适应卡尔曼滤波地铁测速定位方法[J]. 仪器仪表学报, 2025,

46(1): 236-246.
Wan Junhao, Zuo Jianyong, Ding Jingxian, et al. A speed measurement and positioning method for metro based on innovation-based adaptive Kalman filter [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2025, 46(1): 236-246.
[2] Jin Y Q, Zhang W N, Sun H, et al. Learning-aided inertial odometry with nonlinear state estimator on manifold [J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2023, 24(9): 9792-9803.
[3] 刘慧,施志翔,沈亚运,等. 基于改进 ESKF 的植保无人机时延位姿补偿算法[J]. 仪器仪表学报, 2024, 45(2): 315-324.
Liu Hui, Shi Zhixiang, Shen Yayun, et al. Time delay and attitude compensation algorithm for plant protection UAV based on the improved ESKF [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2024, 45(2): 315-324.
[4] 朱先圆,王少聪,贾彦鹏,等. 面向复杂地面环境的机器人激光 SLAM[J]. 仪器仪表学报, 2026, 47(4): 155-167.
Zhu Xianyuan, Wang Shaocong, Jia Yanpeng, et al. LiDAR SLAM for ground robotics in complex environments [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2026, 47(4): 155-167.
[5] Yi H T, Zhu M R, Wu Y X, et al. Angular acceleration-free IMU-joint vector calibration based on measurement integrals[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2025, 74: 4015310.
[6] Zhuang Y, Sun X, Li Y, et al. Multi-sensor integrated navigation/positioning systems using data fusion: From analytics-based to learning-based approaches [J]. Information Fusion, 2023, 95: 62-90.
[7] Qin T, Li P L, Shen S J. VINS-Mono: A robust and versatile monocular visual-inertial state estimator [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2018, 34(4): 1004-1020.
[8] Yanabe D, Kanoga S, Frémont V, et al. Nonlinear dynamical system identification under external disturbances by maximum a posteriori (MAP) estimation for robotics [C]//IEEE International Conference on Advanced Motion Control, 2024: 1-5.
[9] Shen Z H, Li X X, Wang X B, et al. A novel factor graph framework for tightly coupled GNSS/INS integration with carrier-phase ambiguity resolution[J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2024,

- 25(10): 13091-13105.
- [10] Zhou X C, Ma Z C, Wang C Y, et al. A factor graph optimization slam mapping method for autonomous vehicles considering dynamic target motion [J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2025, 26(11): 20836-20849.
 - [11] Forster C, Carlone L, Dellaert F, et al. On-manifold preintegration for real-time visual-inertial odometry [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2017, 33(1): 1-21.
 - [12] Cao S Z, Lu X Y, Shen S J. GVINS: Tightly coupled GNSS-visual-inertial fusion for smooth and consistent state estimation [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2022, 38(4): 2004-2021.
 - [13] Nguyen T M, Cao M Q, Yuan S H, et al. Viral-fusion: A visual-inertial-ranging-LiDAR sensor fusion approach [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2021, 38(2): 958-977.
 - [14] Kalman R E. A new approach to linear filtering and prediction problems [J]. Journal of Basic Engineering, 1960, 82(1): 35-45.
 - [15] Olson C F, Matthies L H, Schoppers H, et al. Robust stereo ego-motion for long distance navigation [C]//IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2000, 2: 453-458.
 - [16] Kottas D G, Hesch J A, Bowman S L, et al. On the consistency of vision-aided inertial navigation [C]//Experimental Robotics; Proceedings of 13th International Symposium on Experimental Robotics, 2013: 303-317.
 - [17] Mourikis A I, Roumeliotis S I, Burdick J W. SC-KF mobile robot localization: A stochastic cloning Kalman filter for processing relative-state measurements [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2007, 23(4): 717-730.
 - [18] Roumeliotis S I, Burdick J W. Stochastic cloning: A generalized framework for processing relative state measurements [C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2002, 1788-1795.
 - [19] Lynen S, Achtelik M W, Weiss S, et al. A robust and modular multi-sensor fusion approach applied to MAV navigation [C]//IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2013: 3923-3929.
 - [20] Shen S J, Mulgaonkar Y, Michael N, et al. Multi-sensor fusion for robust autonomous flight in indoor and outdoor environments with a rotorcraft MAV [C]//2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2014: 4974-4981.
 - [21] Emter T, Petereit J. Stochastic cloning and smoothing for fusion of multiple relative and absolute measurements for localization and mapping [C]//2018 15th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, 2018: 1508-1513.
 - [22] Emter T, Schirg A, Woock P, et al. Stochastic cloning for robust fusion of multiple relative and absolute measurements [C]//2019 IEEE Intelligent Vehicles Symposium, 2019: 1782-1788.
 - [23] Amirhosseini S F, Romanovas M, Schwarze T, et al. Stochastic cloning unscented Kalman filtering for pedestrian localization applications [C]//International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation, 2013: 1-10.
 - [24] Mourikis A I, Roumeliotis S I. A multi-state constraint Kalman filter for vision-aided inertial navigation [C]. IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2007: 3565-3572.
 - [25] Mina T, Marinello L, Christian J. Remarks on stochastic cloning and delayed-state filtering [PP/OL]. V1. (2025-08-28) [2025-12-12]. <https://arXiv.org/abs/2508.21260>.
 - [26] Schmidt S F. Application of state-space methods to navigation problems [J]. Advances in Control Systems, 1966, 3: 293-340.
 - [27] Woodbury D P, Junkins J L. On the consider Kalman filter [C]//AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, 2010: 7752.
 - [28] Zhu H B, Gui H C, Zhong R. Unscented Schmidt-Kalman filter on Lie groups with application to spacecraft attitude estimation [J]. Advances in Space Research, 2024, 74(11): 5713-5724.
 - [29] Fife W N. Multi-state measurement processing with factorized stochastic cloning [C]//Proceedings of AIAA SciTech Forum, 2023: 2323.
 - [30] Groves P D. Principles of GNSS, inertial, and multisensor integrated navigation systems [J]. Journal of Navigation, 2014, 67(1): 191-192.
 - [31] Crassidis J L, Junkins J L. Optimal estimation of dynamic systems [M]. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2011.
 - [32] Farebrother R. The Gauss and Gauss-Jordan methods [M]. New York: Marcel Dekker, 1988.
 - [33] Zou D P, Wu Y X, Pei L, et al. StructVIO: Visual-

inertial odometry with structural regularity of man-made environments [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2019, 35(4): 999-1013.

[34] Xu W, Zhang F. Fast-LIO: A fast, robust LiDAR-inertial odometry package by tightly-coupled iterated Kalman filter [J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2021, 6(2): 3317-3324.

[35] Zhang T X, Zhang X X, Liao Z B, et al. AS-LIO: Spatial overlap guided adaptive sliding window LiDAR-inertial odometry for aggressive FOV varia-tion[C]// 2024 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2024: 10829-10836.

[36] Ouyang W, Wu Y X, Chen H Y. INS/Odometer land navigation by accurate measurement modeling and multiple-model adaptive estimation [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2021, 57(1): 245-262.

作者简介



薛博文, 2023 年于天津大学获得学士学位,现为上海交通大学硕士研究生,主要研究方向为惯性基导航与状态估计。
E-mail: bowen. xue@ sjtu. edu. cn

Xue Bowen received his B. Sc. degree from Tianjin University in 2023. He is currently an M. Sc. candidate at Shanghai Jiaotong University. His main research interests include inertial-based navigation systems and state estimation.



朱茂然 (通信作者), 2017 年于武汉大学获得学士学位, 2022 年于上海交通大学获得博士学位, 现为上海交通大学自动化与感知学院助理教授, 主要研究方向为惯性基导航与状态估计以及穿戴式运动感知。
E-mail: zhumaoran@ sjtu. edu. cn

Zhu Maoran (Corresponding author) received his B. Sc. degree from Wuhan University in 2017, and his Ph. D. degree from Shanghai Jiao Tong University in 2022. He is currently an assistant professor at the School of Automation and Intelligent Sensing, Shanghai Jiao Tong University. His main research

interests include inertial-based navigation systems, state estimation, and wearable human motion sensing.



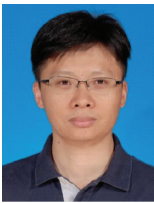
韩佳乐, 2022 年于吉林大学获得学士学位, 2025 年于上海交通大学获得硕士学位, 现为香港大学科研助理, 主要研究方向为惯性基导航与状态估计以及惯性视觉融合。
E-mail: jhan04573@ gmail. com

Han Jiale received his B. Sc. degree from Jilin University in 2022, and his M. Sc. degree from Shanghai Jiao Tong University in 2025. He is currently a research assistant at The University of Hong Kong. His main research interests include inertial-based navigation, state estimation, and inertial-visual fusion.



张弘宇, 2021 年于山东大学获得学士学位, 2024 年于上海交通大学获得硕士学位, 现为上海交通大学博士研究生。主要研究方向为惯性基导航与状态估计以及惯性视觉融合。
E-mail: hongyuzhang@ sjtu. edu. cn

Zhang Hongyu received his B. Sc. degree from Shandong University in 2021, and his M. Sc. degree from Shanghai Jiao Tong University in 2024. He is currently a Ph. D. candidate at Shanghai Jiaotong University. His main research interests include inertial-based navigation systems, state estimation, and inertial-visual fusion.



武元新, 1998 年和 2005 于国防科技大学分别获得学士和博士学位。现为上海交通大学自动化与感知学院教授。主要研究方向为惯性基导航、状态估计、惯性视觉融合和穿戴式运动感知。
E-mail: yuanx_wu@ hotmail. com

Wu Yuanxin received his B. Sc. and Ph. D. degrees from National University of Defense Technology in 1998 and 2005, respectively. He is currently a professor at the School of Automation and Intelligent Sensing, Shanghai Jiao Tong University. His main research interests include inertial-based navigation systems, state estimation, inertial-visual fusion, and wearable human motion sensing.